

Method of multiple scales on Duffing oscillator equation and the existence of its limit cycle

Gusrian Putra^{1*}, Meysi Supmawati¹, Bayu Prasetyo¹

¹Program Studi Matematika, Jurusan Sains, Institut Teknologi Sumatera, Lampung, 35365, Indonesia

*Corresponding email: gusrian.putra@ma.itera.ac.id

ARTICLE INFO

Article History

Received : 04-09-2023

Revised : 16-10-2023

Accepted : 21-10-2023

Keyword

Duffing Equation;
Multiple Scales Method;
Nonlinearity Constant;
Limit Cycle.

ABSTRACT

The Duffing Oscillator equation is a second-order nonlinear differential equation that describes an oscillator with a cubic nonlinearity. In this paper, the Duffing equation involves damping factors, restoring forces, periodic force and its frequency, and nonlinearity constants. One of the perturbation techniques that can be used to determine the approximate solution of the Duffing oscillator equation is the method of Multiple Scales. Due to the existence of a sinusoidal periodic force in the equation, the Multiple Scales method produces a sinusoidal approximation as its solution. The solutions are also in a good agreement with the numerical results for small nonlinearity constants. The smaller the nonlinearity constant, the smaller the error obtained with the numerical results in comparison. The approximate solution also tends to be sinusoidal for small nonlinearity constants. Finally, the approximate solution obtained is able to predict the existence of a limit cycle in the Duffing Oscillator equation around the origin due to the existence of its particular solutions.

DOI: ...

©2023 TJoMA. All rights reserved.

1. PENDAHULUAN

Persamaan Duffing Osilator merupakan persamaan diferensial nonlinier orde dua yang menggambarkan osilator dengan kenonlinieran kubik. Persamaan Duffing Osilator merupakan suatu pendekatan model dalam banyak sistem fisik (Pratiwi, Syafwan, & Husna, 2016). Bentuk umum persamaan Duffing adalah

$$\frac{d^2 x^*}{dt^{*2}} + f(x^*) = 0, \quad (1)$$

dengan $\frac{d^2 x^*}{dt^{*2}}$ adalah percepatan sistem dan $f(x^*)$ adalah gaya pemulih (*restoring force*). Misalkan $x^* = x_0^*$ merupakan titik ekuilibrium untuk persamaan (1), maka $f(x_0^*) = 0$. Lebih lanjut, jika f merupakan persamaan analitik, maka persamaan (1) dapat ditulis berdasarkan deret Taylor di sekitar titik ekuilibrium sebagai berikut

$$\ddot{u} + \sum_{i=1}^{\infty} k_i u^i = 0,$$

dengan $u = x^* - x_0^*$ dan $k_i = \frac{d^i f}{dx^i}(x_0^*)$ (Nayfeh, 1980).

Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan Persamaan Duffing Osilator adalah teknik perturbasi. Dalam (Nayfeh, 1980), beberapa teknik perturbasi diantaranya *Straightforward Expansions*, *Strained Coordinates*, *Asymptotic Expansions*, *Averaging*, dan *Multiple Scales*. Metode *Straightforward* dapat ditemukan dalam (Troullier & Martins, 1990)

untuk membandingkan sifat konvergensi pseudential. Untuk Metode *Strained Coordinates*, Pedroso dkk dalam (Pedroso & Domoto, 1973) menggunakan metode tersebut untuk membahas *inward spherical solidification*. Pada (Kadalbajoo & Reddy, 1989) metode *asymptotic expansions* digunakan untuk membandingkan solusi perturbasi yang diperoleh dengan hasil numerik di permasalahan perturbasi *singular*. Metode *Averaging* dibahas dalam (Tamimi & Waluya, 2014) untuk menyelesaikan persamaan Duffing Osilator pada aplikasi weak signal detection. Sedangkan metode multiple scale dibahas dalam (Widyaningrum, Waluya, & Wuryanto, 2012) untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier sistem *double shockbreaker*.

Beberapa penelitian sebelumnya juga sudah membahas eksistensi siklus limit dan penerapa metode *Multiple Scales* pada Persamaan Duffing. Dalam (Ursulasari & Hasan, 2016) telah dikaji eksistensi siklus limit pada Persamaan Duffing menggunakan transformasi koordinat polar. Di lain pihak, metode *Multiple Scales* sebelumnya dalam (Horsen & Brake, 2009) sangat baik dalam mengaproksimasi solusi persamaan nonlinier. Lebih lanjut, dalam (Pakdemirli & Boyacı, 1999) hasil Metode *Multiple Scales* menghasilkan solusi berupa aproksimasi yang mendekati solusi eksaknya.

Pada tulisan ini akan diimplementasikan Metode *Multiple Scales* untuk menghitung solusi dari Persamaan Duffing Osilator. Hasil yang diperoleh kemudian dilihat kesesuaiannya dengan hasil yang diperoleh secara numerik. Lebih lanjut, eksistensi siklus limit juga akan dilihat dengan menganalisis solusi aproksimasi yang diperoleh.

2. METODE

Pada subbab ini bentuk umum persamaan yang akan dikaji adalah sebagai berikut

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0. \quad (2)$$

Persamaan (2) merupakan persamaan Duffing dengan kondisi awal

$$u(0) = x_0 \text{ dan } \dot{u}(0) = \dot{x}_0.$$

Misalkan solusi persamaan (2) diberikan oleh

$$u(t; \varepsilon) = \hat{u}(t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t, \dots; \varepsilon), \quad (3)$$

atau

$$u(t; \varepsilon) = \hat{u}(T_0, T_1, T_2, \dots; \varepsilon), \quad (4)$$

dengan $T_i = \varepsilon^i t$, $i = 1, 2, \dots$. Berdasarkan aturan rantai, turunan pertama dan kedua dari persamaan (4) terhadap waktu t adalah

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \quad (5)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \varepsilon^2 \left(2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} \right) + \dots \quad (6)$$

Dengan menggunakan persamaan (5) dan (6), maka persamaan (1) menjadi

$$\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial T_0 \partial T_1} + \varepsilon^2 \left(2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} \right) + \dots = 0. \quad (7)$$

Hal ini mengakibatkan solusi (4) dapat ditulis sebagai berikut

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots \quad (8)$$

Untuk memudahkan penulisan misalkan $\partial_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$ dan $\partial_{nm}^2 = \frac{\partial}{\partial T_n \partial T_m}$. Dengan mensubstitusikan persamaan (8) ke (9), didapat

$$\partial_0^2 u_0 + \varepsilon \partial_0^2 u_1 + 2\varepsilon \partial_{01}^2 u_0 + u_0 + \varepsilon u_1 + \dots = 0. \quad (9)$$

Ketika $O(1)$ dan $O(\varepsilon)$ maka pada persamaan (9) secara berturut-turut berlaku

$$\partial_0^2 u_0 + u_0 = 0, \quad (10)$$

$$\partial_0^2 u_1 + u_1 = -2\partial_{01}^2 u_0 - u_0^3. \quad (11)$$

Adapun solusi umum dari persamaan (10) adalah

$$u_0 = a(T_1, T_2, \dots) \cos(T_0 + \beta(T_1, T_2, \dots)), \quad (12)$$

dengan a dan β bukan konstanta tetapi fungsi dari skala waktu T_i kecuali T_0 sebagai implikasi dari penyelesaian turunan u_0 terhadap T_0 pada persamaan (12). Selanjutnya, hasil substitusi persamaan (12) ke (13) adalah

$$\partial_0^2 u_1 + u_1 = 2 \frac{\partial a}{\partial T_1} \sin(T_0 + \beta) + \left(2a \frac{\partial \beta}{\partial T_1} - \frac{3}{4} a^3 \right) \cos(T_0 + \beta) - \frac{1}{4} a^3 \cos(3T_0 + 3\beta). \quad (13)$$

Perhatikan ruas kanan pada persamaan (13) menghasilkan suku sekuler untuk u_1 . Agar solusi yang diperoleh seragam, maka suku sekuler harus dieliminasi. Hal ini bisa dicapai dengan menetapkan masing-masing koefisien dari $\sin(T_0 + \beta)$ dan $\cos(T_0 + \beta)$ sama dengan nol sehingga

$$\frac{\partial a}{\partial T_1} = 0, \quad (14)$$

$$2a \frac{\partial \beta}{\partial T_1} - \frac{3}{4} a^3 = 0. \quad (15)$$

Adapun solusi homogen u_{1h} dari persamaan (13) memiliki bentuk yang sama dengan solusi umum di $O(1)$, lebih tepatnya

$$u_{1h} = \tilde{a}(T_1, T_2, \dots) \cos(T_0 + \tilde{\beta}(T_1, T_2, \dots)), \quad (16)$$

dengan $\tilde{a}$ dan $\tilde{\beta}$ memiliki penjelasan yang sama dengan a dan β pada persamaan (12). Solusi dari persamaan (14) adalah $a = a(T_2, T_3, \dots)$ suatu konstanta. Jika $a \neq 0$, maka persamaan (15) dapat ditulis ulang sebagai

$$\frac{\partial \beta}{\partial T_1} = \frac{3}{8} a^2. \quad (17)$$

Nilai a dan β selanjutnya bergantung kepada nilai awal yang menyertai persamaan (2) berdasarkan ekspansi (8).

Lebih lanjut, setelah solusi homogen u_{1h} diperoleh, maka solusi partikular u_{1p} juga dapat dihitung di $O(\varepsilon)$. Dengan demikian, solusi persamaan (2) hingga $O(\varepsilon)$ dapat ditulis sebagai berikut

$$u = u_0 + \varepsilon(u_{1h} + u_{1p}). \quad (18)$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Solusi Persamaan Duffing dengan Metode Multiple Scale

Persamaan Duffing yang digunakan adalah hasil modifikasi dari persamaan (2) berdasarkan (Cai, 2019) dengan model sistem peredam pegas yang lebih dikenal dengan istilah Persamaan Duffing Osilator yang diberikan oleh

$$\ddot{y} + \beta \dot{y} - \kappa y + \varepsilon y^3 = F \cos(\omega t), \quad (19)$$

dengan nilai awal $y(0) = A$ dan $\dot{y}(0) = 0$. Pada persamaan (19), $\ddot{y}$ merepresentasikan percepatan pegas pada waktu t , $\dot{y}$ menyatakan kecepatan, y merupakan pertambahan panjang pegas, β menyatakan koefisien peredam, κ menyatakan koefisien gaya pemulih, dan ε menyatakan konstanta kenonlinieran sekaligus parameter perturbasi (dengan $0 < \varepsilon \ll 1$), F merupakan amplitudo gaya periodik, dan ω menyatakan frekuensi dari gaya periodik.

Untuk menyelesaikan persamaan (19) digunakan Metode *Multiple Scales* dengan skala waktu seragam, yakni $T_i = \varepsilon^i t$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Dengan mengasumsikan persamaan (4) sebagai solusi dari persamaan (19) dan operator turunan pertama dan kedua terhadap waktu pada persamaan (5) dan (6) maka pada saat $O(1)$ persamaan (19) diberikan oleh

$$\frac{\partial^2 Y_0}{\partial T_0^2} + \beta \frac{\partial Y_0}{\partial T_0} - \kappa Y_0 - F \cos(\omega T_0) = 0. \quad (20)$$

Eksistensi suku $F \cos(\omega T_0)$ membuat persamaan diferensial (20) bersifat nonhomogen. Hal ini menjadikan solusi persamaannya terdiri dari dua jenis solusi, yakni solusi homogen dan solusi partikular, dinotasikan $Y_0 = Y_{0h} + Y_{0p}$. Terlebih dahulu akan dicari solusi homogen Y_{0h} dengan menyelesaikan persamaan diferensial versi homogen (20), yakni

$$\frac{\partial^2 Y_{0h}}{\partial T_0^2} + \beta \frac{\partial Y_{0h}}{\partial T_0} - \kappa Y_{0h} = 0. \quad (21)$$

Dengan menggunakan metode karakteristik dan memandang kasus $4\kappa < -\beta^2$ diperoleh solusi homogen untuk Y_{0h} sebagai berikut

$$Y_{0h} = e^{-\frac{\beta T_0}{2}} [A_0 \cos(\lambda T_0 + B_0)], \quad (22)$$

dengan $\lambda = \frac{\sqrt{-\beta^2 - 4\kappa}}{2}$ dan $A_0 = A_0(T_1, T_2, \dots)$ dan $B_0 = B_0(T_1, T_2, \dots)$ sebagai dua variabel yang belum diketahui nilainya yang juga dikenal dengan istilah konstanta integrasi untuk persamaan (21). Nilai A_0 dan B_0 akan ditentukan kemudian.

Selanjutnya, solusi partikular Y_{0p} dapat ditentukan dengan menyelesaikan persamaan diferensial berikut

$$\frac{\partial^2 Y_{0p}}{\partial T_0^2} + \beta \frac{\partial Y_{0p}}{\partial T_0} - \kappa Y_{0p} = F \cos(\omega T_0) \quad (23)$$

Fungsi penduga untuk solusi partikular Y_{0p} adalah

$$Y_{0p} = a_0 \cos(\omega T_0) + b_0 \sin(\omega T_0). \quad (24)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (24) ke persamaan (23) dan menyelesaikan persamaan yang diperoleh terhadap a_0 dan b_0 maka didapatkan

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{F}{\chi}, b_0 = \frac{\beta \omega F}{(\omega^2 + \kappa)\chi}, \\ \chi &= \frac{(\omega^2 + \kappa)^2 + (\beta \omega)^2}{(\omega^2 + \kappa)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Lebih lanjut, solusi Y_0 sekarang dapat dituliskan sebagai berikut

$$Y_0 = Y_{0h} + Y_{0p} = e^{-\frac{\beta T_0}{2}} [A_0 \cos(\lambda T_0 + B_0)] + a_0 \cos(\omega T_0) + b_0 \sin(\omega T_0). \quad (26)$$

Solusi Y_0 pada persamaan (26) belum lengkap karena nilai A_0 dan B_0 tidak diketahui. Pandang kembali nilai awal yang diberikan: $y(0) = A$ dan $\dot{y}(0) = 0$. Ini berarti

$$y(t) \equiv Y(T_0, T_1, \dots) = Y_0(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon Y_1(T_0, T_1, \dots) + O(\varepsilon^2),$$

$$\dot{y}(t) \equiv \dot{Y}(T_0, T_1, \dots) = \dot{Y}_0(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon \dot{Y}_1(T_0, T_1, \dots) + O(\varepsilon^2),$$

dengan demikian

$$Y_0(0, 0, \dots) = A \text{ dan } \dot{Y}_0(0, 0, \dots) = 0. \quad (27)$$

Persamaan (27) akan digunakan untuk menentukan nilai awal yang akan digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang melibatkan $A_0(T_1, T_2, \dots)$ dan $B_0(T_1, T_2, \dots)$. Berdasarkan persamaan (26) dan (27), berlaku dua persamaan berikut

$$\begin{aligned} A_0(0, 0, \dots) \cos(B_0(0, 0, \dots)) &= A - a_0, \\ A_0(0, 0, \dots) \sin(B_0(0, 0, \dots)) &= \frac{2b_0\omega + (a_0 - A)\beta}{\eta}. \end{aligned} \quad (28)$$

Dengan menggunakan identitas trigonometri, dari sistem persamaan (28) dengan mudah diperoleh

$$\begin{aligned} A_0(0, 0, \dots) &= \sqrt{\frac{(2b_0\omega + (a_0 - A)\beta)^2 + \lambda^2(a_0 - A)^2}{\lambda^2}} \\ B_0(0, 0, \dots) &= \cot^{-1} \left(\frac{\lambda(A - a_0)}{2b_0\omega + (a_0 - A)\beta} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

Sistem persamaan (29) selanjutnya menjadi nilai awal yang dapat digunakan untuk menghitung $A_0(T_1, T_2, \dots)$ dan $B_0(T_1, T_2, \dots)$.

Sebelum menggunakan persamaan (29), pandang terlebih dahulu persamaan (7) saat $O(\varepsilon)$:

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial T_0^2} + \beta \frac{\partial Y_1}{\partial T_0} - \kappa Y_1 = -2 \frac{\partial^2 Y_0}{\partial T_0 \partial T_1} - \beta \frac{\partial Y_0}{\partial T_1} + Y_0^3. \quad (30)$$

Perhatikan ruas kiri persamaan (30) yang identik dengan ruas kiri persamaan saat $O(1)$. Hal ini membuat solusi homogen untuk Y_1 memiliki formulasi yang sama dengan solusi homogen untuk Y_0 . Pada ruas kanan persamaan (30) hanya variabel Y_0 yang terlibat sehingga dengan mensubstitusikan persamaan (26) diperoleh dua suku pertama di ruas kanan persamaan yang memuat turunan terhadap T_1 .

Pada ruas kanan persamaan (26) ini juga muncul suku sekuler, yakni suku yang membuat solusi yang diperoleh tidak seragam. Untuk menanggulangi masalah ini, maka suku-suku ini harus dieliminasi. Suku-suku yang dimaksud adalah yang memuat fungsi $\cos(\lambda T_0 + B_0)$ dan $\sin(\lambda T_0 + B_0)$. Akibatnya, agar suku-suku yang memuat fungsi tersebut dapat dieliminasi maka haruslah koefisiennya bernilai 0. Berdasarkan implikasi ini maka berlaku

$$-\frac{dB_0}{dT_1} \lambda + \frac{3}{2} \left(b_0^2 + a_0^2 + \frac{A_0^2}{2} e^{-T_0 \beta} \right) = 0, \quad (31)$$

$$\frac{dA_0}{dT_1} e^{-\frac{T_0\beta}{2}} \lambda = 0.$$

Sekarang kita sudah memiliki masalah nilai awal, yakni sistem persamaan diferensial biasa (31) dengan nilai awal pada persamaan (29). Dengan menyelesaikan masalah nilai awal tersebut maka diperoleh

$$\begin{aligned} A_0(T_1, T_2, \dots) &= A_0(0, 0, \dots), \\ B_0(T_1, T_2, \dots) &= B_0(0, 0, \dots) + \frac{T_1(3\eta^2 + (6b_0^2 + 6a_0^2)e^{T_0\beta})}{4\lambda e^{T_0\beta}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Jadi, solusi persamaan (19) dengan metode *Multiple Scales* hingga orde pertama diberikan oleh

$$Y_0 = A_0 e^{-\frac{\beta t}{2}} \cos(\lambda t + B_0) + a_0 \cos(\omega t) + b_0 \sin(\omega t). \quad (33)$$

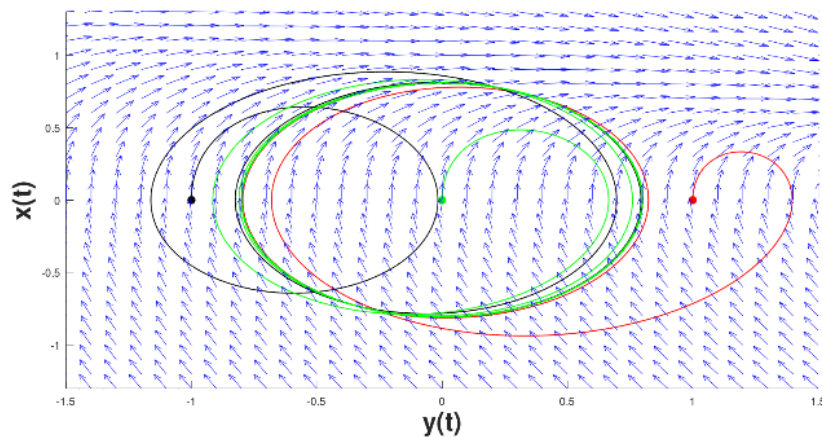
dengan $A_0 \equiv A_0(T_1, T_2, \dots)$ dan $B_0 \equiv B_0(T_1, T_2, \dots)$ diberikan oleh persamaan (32) sedangkan konstanta a_0 dan b_0 diberikan oleh persamaan (25).

3.2. Perbandingan Solusi Perturbasi dengan Hasil Numerik

Persamaan (19) merupakan persamaan diferensial biasa orde 2 nonhomogen yang dapat dituliskan kembali menjadi sistem dua persamaan diferensial biasa orde 1 nonhomogen. Dalam hal ini, misalkan $x = \dot{y}$ sehingga $\dot{x} = \ddot{y}$ sehingga persamaan (19) dapat dituliskan kembali menjadi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\beta x + \kappa y - \varepsilon y^3 + F \cos(\omega t), \\ \dot{y} &= x. \end{aligned} \quad (34)$$

Perhatikan bahwa sistem (34) memiliki tiga titik kritis ketika $F = 0$, yakni $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$, $(x_{2,3}^*, y_{2,3}^*) = (0, \pm\sqrt{\kappa/\varepsilon})$. Ketika $F \neq 0$, sistem (34) tidak lagi memiliki titik kritis. Dinamika dari sistem yang dihasilkan ketika $F \rightarrow 0$ memiliki dinamika yang tidak jauh berbeda ketika $F = 0$. Untuk melihat dinamika dari sistem (34) secara numerik, metode Runge-Kutta dapat digunakan.

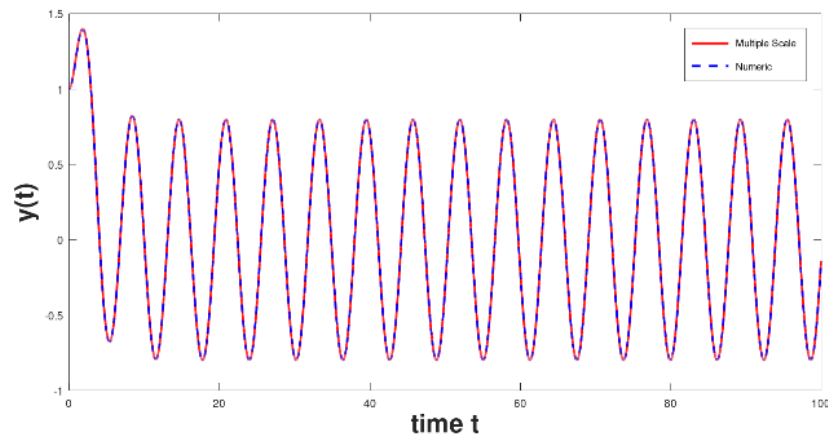


Gambar 1. Potret fase sistem (34) ketika $F = \omega = 1.01$, $\beta = 1$, $\kappa = -0.26$, dan $\varepsilon = 0.001$.

Berdasarkan Gambar 1, perilaku sistem (34) di sekitar titik $(y, x) = (0, 0)$ cenderung membentuk siklus limit. Pada gambar diambil tiga titik uji, yakni $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$ yang mana ketiga titik tersebut kurva solusinya membentuk siklus limit di sekitar titik

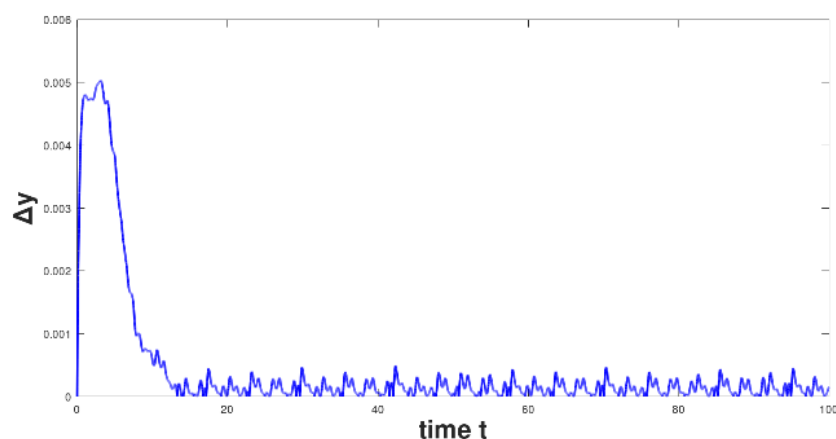
(0,0). Secara numerik, berdasarkan gambar kita masih belum bisa menjelaskan eksistensi siklus limit ini. Kesimpulan yang diperoleh tentu saja hanya berdasarkan hasil visual yang ditampilkan pada Gambar 1.

Selanjutnya akan diperiksa kesesuaian hasil numerik dengan solusi perturbasi yang diperoleh, yakni pada persamaan (33). Dengan menggunakan nilai parameter yang sama seperti pada Gambar 1, kurva solusi perturbasi dan hasil numerik diplot dalam satu bidang seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Plot solusi Persamaan Dufing Osilator (19) menggunakan Metode *Multiple Scale* (garis-merah) dan dari hasil numerik (garis putus-putus - biru) ketika $F = \omega = 1.01$, $\beta = 1$, $\kappa = -0.26$, dan $\varepsilon = 0.001$.

Pada Gambar 2, solusi perturbasi pada persamaan (33) diplot bersamaan dengan solusi hasil perhitungan numerik untuk $F = \omega = 1.01$, $\beta = 1$, $\kappa = -0.26$, dan $\varepsilon = 0.001$. Secara visual, dapat disimpulkan terdapat kesesuaian yang sangat bagus antara hasil perturbasi dengan hasil numerik. Hasil perturbasi dapat memprediksi dengan baik karakteristik sinusoidal ketika t mulai bernilai cukup besar pada hasil numerik. Lebih lanjut, untuk melihat lebih dekat kesesuaian kedua hasil yang diperoleh maka dapat dianalisis juga plot error kedua solusi terhadap waktu t .

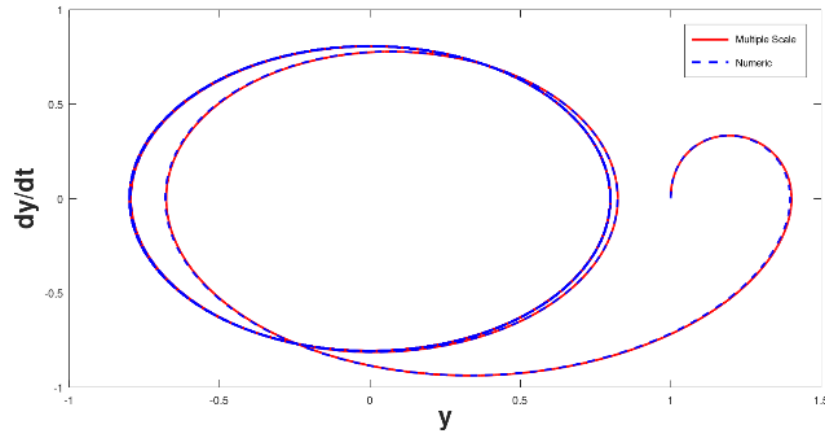


Gambar 3. Plot error antara hasil perturbasi dan hasil numerik di bidang $t - \Delta y$ ketika $F = \omega = 1.01$, $\beta = 1$, $\kappa = -0.26$, dan $\varepsilon = 0.001$.

Terlebih dahulu didefinisikan error sebagai nilai mutlak beda solusi perturbasi Y_0 dengan solusi numerik y_{num} .

$$\Delta y = |Y_0 - y_{num}|.$$

Berdasarkan Gambar 3, dapat disimpulkan bahwa hasil perturbasi dengan hasil numerik memiliki kesesuaian yang cukup bagus untuk $t \rightarrow \infty$. Walaupun untuk nilai t yang cukup kecil masih terdapat eror yang cukup besar antara kedua hasil tersebut. Hal yang cukup menarik adalah Δt cenderung bersifat sinusoidal untuk $t \rightarrow \infty$, dengan kata lain Δt tidak akan konvergen seragam ke 0 sehingga akan selalu ada eror pada kedua hasil yang diperoleh. Untuk hasil simulasi berikutnya, variasi nilai ε ketika $0 < \varepsilon \ll 1$ menunjukkan eror $\Delta y < \varepsilon$, artinya semakin kecil nilai ε yang digunakan semakin bersesuaian hasil perturbasi yang diperoleh dengan hasil numerik.



Gambar 4. Kurva solusi hasil perturbasi (garis-merah) dan hasil numerik (garis putus-putus – biru) untuk masalah nilai awal (19) dan (37) dengan $y(0) = 1$ dan $\dot{y} = 0$ ketika $F = \omega = 1.01$, $\beta = 1$, $\kappa = -0.26$, dan $\varepsilon = 0.001$. Untuk nilai t yang cukup besar, kedua hasil membentuk siklus limit.

Hasil perturbasi yang diperoleh juga mengindikasikan eksistensi siklus limit pada persamaan Duffing Osilator di sekitar titik $(0,0)$. Secara numerik, hasil ini tidak akan muncul tanpa dilakukan simulasi. Namun, berdasarkan hasil yang diperoleh pada persamaan (33) maka

$$|Y_0| \leq \left| A_0 e^{-\frac{\beta t}{2}} \cos(\lambda t + B_0) \right| + |a_0 \cos(\omega t)| + |b_0 \sin(\omega t)|.$$

Jelas bahwa untuk kasus $t \rightarrow \infty$ berlaku

$$|Y_0|^2 \leq a_0^2 + b_0^2.$$

Hal ini mengkonfirmasi eksistensi siklus limit di sekitar titik $(0,0)$ dengan radius siklusnya bergantung pada nilai koefisien solusi partikular dari hasil perturbasi yang diperoleh.

4. KESIMPULAN

Solusi *Multiple Scales* untuk persamaan Duffing Osilator hingga orde pertama memiliki kesesuaian yang bagus dengan hasil numerik. Semakin kecil nilai koefisien kenonlinieran maka semakin kecil juga eror antara hasil numerik dan hasil perturbasi yang cenderung bersifat sinusoidal untuk waktu yang semakin besar. Terakhir, solusi perturbasi yang diperoleh mampu memprediksi eksistensi siklus limit pada Persamaan Duffing Osilator.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis berterima kasih kepada Nugraha Catur Septian Patra dan Reza Prayogi yang telah memberikan dukungan dan diskusi bersama dalam penyelesaian tulisan ini. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Himatika ITERA yang secara parsial turut membantu dalam penyelesaian tulisan ini.

REFERENSI

- Cai, J. H. (2019). Dynamic Analysis of Modified Duffing System via Intermitten External Force and Its Application. *Applied Sciences*, 9(21), 46-93.
- Horssen, W. T., & Brake, M. C. (2009). On The Multiple Scales Perturbation Method for Difference Equations. *Non Linier Dyn*, 55, 401-418.
- Kadalbajoo, M. K., & Reddy, Y. N. (1989). Asymptotic and Numerical Analysis of Singular Perturbation Problem. *Applied Mathematic and Computation*, 3, 223-259.
- Nayfeh, A. H. (1980). *Introduction to Perturbation Techniques*. Virginia: Wiley Clasics Library Edition Published.
- Pakdemirli, M., & Boyacı, H. (1999). A Comparison Of Different Versions of The Method of Multiple Scales for an Arbitrary Model of ODD Nonlinierities. *Mathematical & Computational Applications*, 5(3), 273-282.
- Pedroso, R. I., & Domoto, G. A. (1973). Inward Spherical Solidification-Solution by The Method Of Strained Coordinates. *Int.J.Heat Muss Transfer*, 16, 1037-1049.
- Pratiwi, L., Syafwan, M., & Husna, R. (2016). Metode Bentuk Normal pada Penyelesaian Persamaan Duffing. *Jurnal Matematika UNAND*, 5, 47-55.
- Tamimi, Z. A., & Waluya, S. B. (2014). Penyelesaian Persamaan Duffing Osilator pada Aplikasi Weak Signal Detection Menggunakan Metode Averaging. *Indonesian Journal of Mathematics and Natural Sciences*, 37(2), 192-199.
- Troullier, N., & Martins, J. L. (1990). A Straightforward Method for Generating Soft Transferable Pseudentials. *Solid State Communications*, 74, 613-616.
- Ursulasari, Y., & Hasan, M. (2016). Limit Cycle Persamaan Van Der Pol dan Persamaan Duffing. *Majalah Ilmiah Matematika dan Statistik*, 16, 1-12.
- Widyaningrum, I., Waluya, S. B., & Wuryanto. (2012). Metode Multiple Time Scale untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Tak Linier Sistem Double Shockbreaker. *UNNES Journal of Mathematics*.