

Prediction of the Population of Banda Aceh City Using the Laplace Transformation

Nurul Syafira^{1,*}, Eva Murida¹, Safiatun Hanim¹, Syarifah Meurah Yuni¹, Saiful Amri¹, Hafnani¹, Nurmaulidar¹

¹Program Studi Matematika, Universitas Syiah Kuala, Banda Aceh, Indonesia

*Corresponding email: nsyafira2122@gmail.com

ARTICLE INFO	ABSTRACT
Article History Received : 29-03-2024 Revised : 25-04-2024 Accepted : 29-04-2024 Keyword Laplace Transformation; Exponential Population Model; Population Growth Prediction.	Population prediction is an estimate of the population in the future based on assumptions from the population growth rate. Based on data from the Central Statistics Agency (BPS), the population in Banda Aceh City is increasing every year with an average growth of around 2%. The purpose of this research is to predict the population in Banda Aceh City using the Laplace transformation on exponential model. The exponential model is a simple model to describe population growth patterns. Using Laplace transformation can easily get a definitive analytic solution. The Laplace transformation of the exponential model is used to calculate the growth rate with data on the population of Banda Aceh City in 2015-2022. Based on the results of the study, the value of the growth rate (r) is obtained from determining the percentage error (MAPE) of each model to determine the predicted value that is closest to the actual value. So, model VII is the most accurate with a value (r) is 0,00412. The result of this study also show that model VII is used to predict the population in Banda Aceh City in 2030 when $t = 15$ is 266.259 people.
DOI: ...	©2024 TJoMA. All rights reserved.

1. PENDAHULUAN

Pertumbuhan penduduk adalah keseimbangan dinamis antara faktor-faktor yang berkontribusi terhadap ekspansi penduduk dan faktor-faktor yang menghambatnya. Pertumbuhan penduduk mengacu pada peningkatan jumlah penduduk dalam suatu wilayah dan jangka waktu tertentu (Pratiwi, 2020). Tingkat pertumbuhan penduduk suatu negara memiliki dampak langsung terhadap lingkungan politik, ekonomi, budaya, dan pendidikan. Oleh karena itu, memproyeksikan perkiraan penduduk suatu wilayah sangatlah penting. Perkiraan penduduk berdasarkan asumsi membuat upaya untuk memprediksi pola pertumbuhan penduduk di masa depan dalam hal jumlah, tingkat kelahiran, migrasi, dan tingkat kematian (Anggreini, 2020).

Pada setiap tahunnya jumlah penduduk kota Banda Aceh terus meningkat, dengan tingkat pertumbuhan rata-rata sekitar 2% pertahunnya. Peningkatan jumlah penduduk ini dapat mempengaruhi kualitas hidup masyarakat. Jumlah penduduk yang diperkirakan akan terus bertambah dari waktu ke waktu dapat menghambat tercapainya keseimbangan optimal antara daya dukung lingkungan baik dari segi kuantitas maupun kualitas. Terdapat beberapa tantangan yang akan dialami masyarakat di kota jika pertumbuhan penduduk terus meningkat setiap tahunnya, salah satunya meningkatnya jumlah pemukiman di kota Banda Aceh. Oleh karenanya, beberapa pihak seperti Badan Pusat Statistik (BPS) Aceh, kotraktor, pemerintah dan pihak-pihak lain yang terkait perlu untuk mengetahui jumlah kependudukan di wilayah kota Banda Aceh di masa-masa yang akan datang (Ramadhan & Idami, 2020).

Transformasi Laplace adalah suatu metode matematika yang digunakan untuk mengubah fungsi waktu menjadi fungsi kompleks dalam domain frekuensi kompleks. Transformasi ini mempermudah penyelesaian persamaan diferensial linier. Dalam tulisannya (Lim, 2016) mengenalkan seorang ahli matematika dan astronom yaitu Pierre-Simon marquis de Laplace yang berhasil menemukan konsep matematika yaitu transformasi Laplace. Penemuannya ini dapat digunakan dalam berbagai bidang salah satunya dalam model *Malthus* atau model eksponensial. Model eksponensial merupakan model pertumbuhan yang sangat

sederhana untuk menggambarkan pola pertumbuhan penduduk. Transformasi Laplace akan berperan dalam menyederhanakan persamaan differensial non-linear, yang akan memudahkan dalam penyelesaian memprediksi jumlah penduduk di kota Banda Aceh di masa yang akan datang.

Dalam penelitian ini akan digunakan transformasi Laplace model pertumbuhan eksponensial karena dalam penelitian Daci & Tola (2018) yang berjudul *Application of Laplace Transform in Finance* menyimpulkan bahwa menggunakan transformasi Laplace dapat dengan mudah mendapatkan solusi analitik definitif dan transformasi Laplace merupakan metode paling sederhana yang mengarah langsung ke penyelesaian yang diperlukan. Pertumbuhan penduduk pada model eksponensial menunjukkan bagaimana pertumbuhan populasi berkembang dalam lingkungan dengan sumber daya alam yang tidak terbatas (Zabadi dkk, 2017). Model eksponensial digunakan untuk menghitung prediksi populasi dengan laju pertumbuhan konstan dimana $P(t)$ menunjukkan jumlah populasi yang berkembang (Nuraeni, 2015).

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui bagaimana model eksponensial dapat digunakan untuk jumlah penduduk di kota Banda Aceh dengan menggunakan transformasi Laplace. Melalui model pertumbuhan populasi ini, tidak hanya dapat melakukan pendekatan terhadap populasi yang tumbuh atau berkurang pada suatu wilayah, namun juga dapat memprediksi jumlah populasi di tahun-tahun yang mendatang dengan rentang waktu jangka panjang.

2. METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deskriptif melalui analisis teori atau literatur terkait. Data jumlah penduduk di Kota Banda Aceh antara tahun 2015-2022 merupakan data sekunder yang digunakan dalam penelitian ini, yang berasal dari BPS Provinsi Aceh. Memilih topik penelitian dan mengumpulkan data penelitian merupakan langkah pertama dalam tahap metode penelitian. Selanjutnya menganalisa data dengan membangun kompartemen dan model pertumbuhan penduduk di kota Banda Aceh berdasarkan asumsi-asumsi yang digunakan, untuk selanjutnya peneliti akan menduga jumlah penduduk di kota Banda Aceh dan terakhir menarik kesimpulan.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Model Pertumbuhan Populasi

Untuk menemukan prediksi pertumbuhan penduduk dengan tingkat galat yang relatif kecil, sejumlah model terus dikembangkan. Model yang tepat juga dapat memberikan hasil prediksi pertumbuhan populasi untuk rentang waktu yang lebih panjang. Model pertumbuhan eksponensial merupakan model yang menggambarkan pertumbuhan populasi tidak memperhitungkan kendala lingkungan, sehingga tidak terjadi memperhitungkan kompetisi untuk mendapatkan makanan. Menurut Kurniawan (2017), model eksponensial membuat asumsi bahwa laju pertumbuhan penduduk sebanding dengan jumlah penduduk secara keseluruhan. Bentuk model pertumbuhan eksponensial yaitu:

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t) \quad (1)$$

dimana $P(t)$ merupakan jumlah populasi pada waktu t dan r merupakan laju pertumbuhan yang konstan.

Berikut penerapan transformasi Laplace pada model pertumbuhan eksponensial untuk memperoleh solusi penyelesaiannya:

Kedua sisi persamaan (1) akan di transformsikan ke bentuk Laplace sehingga diperoleh:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dP(t)}{dt}\right\} = \mathcal{L}\{rP(t)\} \quad (2)$$

Dengan menggunakan sifat transformasi Laplace yaitu:

a) sifat fungsi diferensial:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}P'(t) &= s\mathcal{L}\{P(t) - P(0)\} \\ &= sP(s) - P(0)\end{aligned}$$

b) sifat kelinieran:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{aP(t)\} &= a\mathcal{L}\{P(t)\} \\ &= aP(s)\end{aligned}$$

Sehingga, persamaan (2) diperoleh sebagai berikut:

$$sP(s) - P(0) = rP(s) \quad (3)$$

$P(s)$ merupakan transformasi Laplace dari $P(t)$ dan $P(0)$ adalah nilai awal populasi. Selanjutnya akan diselesaikan persamaan (3) yakni dengan mengisolasi $P(s)$:

$$\begin{aligned}sP(s) - P(0) &= rP(s) \\ sP(s) - rP(s) &= P(0) \\ P(s)(s - r) &= P(0) \\ P(s) &= \frac{P(0)}{s-r}\end{aligned}$$

Maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$P(s) = \frac{P(0)}{s-r} \quad (4)$$

Untuk memperoleh solusi $P(t)$, maka digunakan sifat dari invers transformasi Laplace dari persamaan (4)

$$\mathcal{L}^{-1}\{P(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(0)}{s-r}\right\} \quad (5)$$

Maka diperoleh solusi dari model eksponensial dengan menggunakan transformasi Laplace yaitu:

$$P(t) = P(0)e^{rt} \quad (6)$$

dimana dari persamaan (6) diperoleh persamaan laju pertumbuhan (r) yaitu:

$$r = \frac{\ln \frac{P(t)}{P(0)}}{t} \quad (7)$$

3.2 Perhitungan dan Prediksi Pertumbuhan Penduduk

Tabel 1 di bawah ini menunjukkan data jumlah penduduk kota Banda Aceh dari tahun 2015 samapi dengan tahun 2022 yang diperoleh dari Badan Pusat Statistik (BPS) Kota Banda Aceh, sebagai berikut:

Tabel 1. Jumlah Penduduk Kota Banda Aceh Tahun 2015-2022		
Waktu	Tahun	Jumlah Penduduk
$t = 0$	2015	250.303
$t = 1$	2016	254.904
$t = 2$	2017	259.913
$t = 3$	2018	265.111
$t = 4$	2019	270.321
$t = 5$	2020	252.899
$t = 6$	2021	255.029
$t = 7$	2022	257.635

Akan dihitung prediksi jumlah penduduk di Kota Banda Aceh dengan menggunakan model eksponensial yang telah diperoleh sebelumnya dengan mengasumsikan bahwa t (waktu) diukur untuk tahun dimana $t = 0$ pada tahun 2015, $t = 1$ pada tahun 2016 dan seterusnya, dan

syarat awal $P(0) = 250.303$ dan seterusnya. Selanjutnya untuk menentukan nilai r pada tahun 2016 dengan nilai $t=1$ maka akan disubstitusikan pada persamaan (7), maka diperoleh:

$$r = \frac{\ln \frac{P(1)}{P(0)}}{1}$$

$$r = \frac{\ln \frac{254904}{250303}}{1}$$

$$r = 0,01821$$

nilai r yang telah didapatkan disubstitusikan ke persamaan (6), sehingga diperoleh:

$$P(t) = (250303)e^{(0,01821)t} \quad (8)$$

untuk nilai r pada tahun 2017 dengan nilai $t=2$, maka diperoleh:

$$r = \frac{\ln \frac{P(2)}{P(0)}}{2}$$

$$r = \frac{\ln \frac{259913}{250303}}{2}$$

$$r = 0,01883$$

nilai r yang telah didapatkan disubstitusikan ke persamaan (6), sehingga diperoleh:

$$P(t) = (250303)e^{(0,01883)t} \quad (9)$$

untuk nilai r pada tahun 2018 dengan nilai $t=3$, maka diperoleh:

$$r = \frac{\ln \frac{P(3)}{P(0)}}{3}$$

$$r = \frac{\ln \frac{265111}{250303}}{3}$$

$$r = 0,01915$$

nilai r yang telah didapatkan disubstitusikan ke persamaan (6), sehingga diperoleh:

$$P(t) = (250303)e^{(0,01915)t} \quad (10)$$

untuk nilai r pada tahun 2019 dengan nilai $t=4$, maka diperoleh:

$$r = \frac{\ln \frac{P(4)}{P(0)}}{4}$$

$$r = \frac{\ln \frac{270321}{250303}}{4}$$

$$r = 0,01923$$

nilai r yang telah didapatkan disubstitusikan ke persamaan (6), sehingga diperoleh:

$$P(t) = (250303)e^{(0,01923)t} \quad (11)$$

untuk nilai r pada tahun 2020 dengan nilai $t=5$, maka diperoleh:

$$r = \frac{\ln \frac{P(5)}{P(0)}}{5}$$

$$r = \frac{\ln \frac{252899}{250303}}{5}$$

$$r = 0,00206$$

nilai r yang telah didapatkan disubstitusikan ke persamaan (6), sehingga diperoleh:

$$P(t) = (250303)e^{(0,00206)t} \quad (12)$$

untuk nilai r pada tahun 2021 dengan nilai $t=6$, maka diperoleh:

$$r = \frac{\ln \frac{P(6)}{P(0)}}{6}$$

$$r = \frac{\ln \frac{255029}{250303}}{6}$$

$$r = 0,00312$$

nilai r yang telah didapatkan disubstitusikan ke persamaan (6), sehingga diperoleh:

$$P(t) = (250303)e^{(0,00312)t} \quad (13)$$

untuk nilai r pada tahun 2022 dengan nilai $t=7$, maka diperoleh:

$$r = \frac{\ln \frac{P(7)}{P(0)}}{7}$$

$$r = \frac{\ln \frac{257635}{250303}}{7}$$

$$r = 0,00412$$

nilai r yang telah didapatkan disubstitusikan ke persamaan (6), sehingga diperoleh:

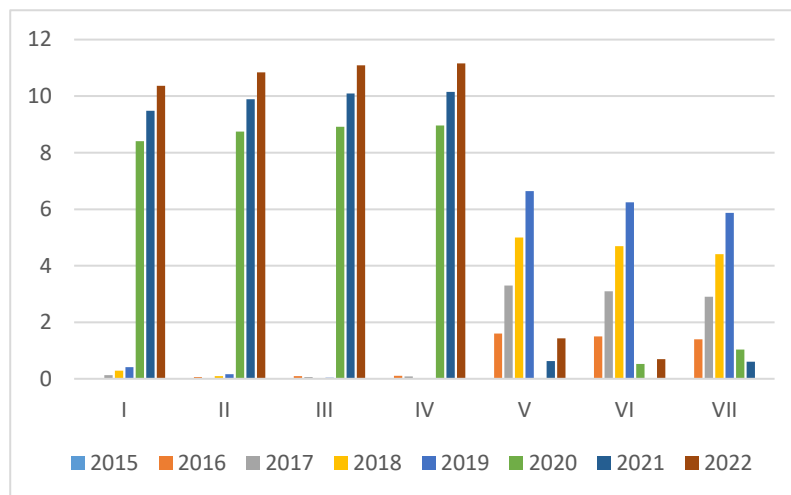
$$P(t) = (250303)e^{(0,00412)t} \quad (14)$$

Dari ketujuh model yang diperoleh Persamaan (8-14) dapat digunakan untuk memprediksi jumlah penduduk. Hasil perhitungan proyeksi jumlah penduduk kota Banda Aceh tahun 2015-2022 dapat dilihat pada Tabel 2 berikut:

Tabel 2. Perbandingan antara Hasil Sensus dan Hasil Model Eksponensial pada Jumlah Penduduk Kota Banda Aceh

Tahun	Hasil Sensus	Model						
		I	II	III	IV	V	VI	VII
2015	250.303	250.303	250.303	250.303	250.303	250.303	250.303	250.303
2016	254.904	254.903	255.061	255.142	255.163	250.819	251.085	251.336
2017	259.913	259.587	259.909	260.075	260.117	251.336	251.870	252.374
2018	265.111	264.357	264.849	265.104	265.168	251.854	252.657	253.416
2019	270.321	269.215	269.884	270.229	270.316	252.374	253.446	254.462
2020	252.899	274.163	275.014	275.454	275.565	252.895	254.238	255.513
2021	255.029	279.201	280.242	280.780	280.915	253.416	255.033	256.568

Berdasarkan Tabel 2 didapatkan bentuk kurva sebagai berikut



Gambar 1. Grafik Jumlah Penduduk Berdasarkan Hasil Sensus dan Hasil Model Eksponensial

Selanjutnya akan dicari nilai *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE) dari setiap model eksponensial yang telah diperoleh dengan menggunakan rumus berikut:

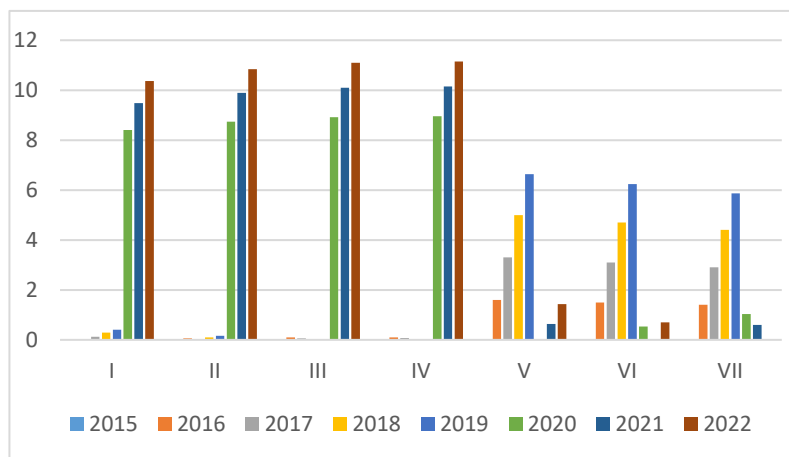
$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{A_t - F_t}{A_t} \right| \times 100\%$$

Hasil perhitungan galat (MAPE) model eksponensial untuk masing-masing model yang digunakan untuk memprediksi jumlah penduduk kota Banda Aceh pada tahun 2015 sampai dengan 2022 adalah sebagai berikut:

Tabel 3. Perhitungan Galat (MAPE) Model Eksponensial dalam Persen Untuk Setiap Model Eksponensial

Tahun	Hasil Sensus	Model						
		I	II	III	IV	V	VI	VII
2015	250.303	0	0	0	0	0	0	0
2016	254.904	0,00039	0,06159	0,09337	0,10161	1,60256	1,49821	1,39974
2017	259.913	0,12543	0,00154	0,06233	0,07849	3,29995	3,09449	2,90058
2018	265.111	0,28441	0,09883	0,00264	0,02150	5,00054	4,69765	4,41136
2019	270.321	0,40914	0,16166	0,03403	0,00185	6,63914	6,24258	5,86673
2020	252.899	8,40810	8,74459	8,91858	8,96247	0,00158	0,52946	1,03361
2021	255.029	9,47814	9,88633	10,09728	10,15022	0,63247	0,00157	0,60346
2022	257.635	10,36233	10,84247	11,09088	11,15299	1,43497	0,70099	0,00310
$\Sigma \text{ galat}/n$		3,63350	3,72463	3,78739	3,80864	2,32640	2,09562	2.02732

Berdasarkan tabel 3 diperoleh bentuk kurva sebagai berikut:



Gambar 2. Grafik Perhitungan Error Setiap Model Eksponensial

Pada perhitungan yang telah didapatkan pada tabel 3 dan pada gambar 2 dapat dilihat bahwa nilai galat dari model eksponensial terkecil berada pada model VII dengan nilai error MAPE terkecil yaitu 2,02732. Menurut (Ofori dkk, 2013) nilai MAPE yang kurang dari 10% atau nilai error paling kecil adalah nilai paling baik sehingga nilai prediksi yang dihasilkan sangat akurat. Maka, model VII sangat tepat digunakan untuk memprediksi jumlah penduduk di kota Banda Aceh pada tahun 2023-2030 karena memberikan hasil yang cukup mendekati dan dengan akurasi yang sangat baik dibandingkan model eksponensial lainnya.

3.3 Prediksi Jumlah Penduduk Kota Banda Aceh Tahun 2023-2030

Untuk mengetahui prediksi jumlah penduduk kota Banda Aceh pada tahun 2023 hingga tahun 2030 digunakan model eksponensial VII untuk memprediksinya, maka persamaan model eksponensial yang digunakan yaitu:

$$P(t) = (250303)e^{(0,00412)t}$$

Laju pertumbuhan (r) dari model diatas adalah 0,41% per tahun. Selanjutnya apabila akan diprediksi jumlah penduduk kota Banda Aceh tahun 2023, dengan mengambil nilai $t = 8$ akan diperoleh:

$$P(8) = (250303)e^{(0,00412)8}$$

$$P(8) = 258690$$

maka didapatkan nilai prediksi jumlah penduduk kota Banda Aceh pada tahun 2023 saat $t = 8$ adalah 258.690 jiwa. Dengan cara yang sama, prediksi jumlah penduduk Kota Banda Aceh untuk tahun 2023-2030 dapat dilihat pada tabel 4 berikut ini:

Tabel 4. Prediksi Jumlah Penduduk di Kota Banda Aceh Tahun 2023-2030

Tahun	Hasil Prediksi
2023	258.690
2024	259.758
2025	260.831
2026	261.908
2027	262.989
2028	264.075
2029	265.165
2030	266.259

4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan bahwa, transformasi Laplace dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan model pertumbuhan penduduk dengan model eksponensial. Adapun solusi umum dari transformasi Laplace model eksponensial yaitu

$$P(t) = P(0)e^{rt}$$

dari hasil perhitungan yang dilakukan dengan menggunakan model eksponensial didapatkan model eksponensial paling akurat untuk memprediksi jumlah penduduk di Kota Banda Aceh pada masa yang akan datang diperoleh dari model eksponensial VII yaitu

$$P(t) = (250303)e^{(0,00412)t}$$

dengan laju pertumbuhan relatif per tahunnya sebesar 0,41%. Sehingga diperoleh nilai prediksi jumlah penduduk di Kota Banda Aceh pada tahun 2030 ketika $t = 15$ yakni diperkirakan berjumlah 266.259 jiwa.

DAFTAR PUSTAKA

- Anggreini, D. 2020. PENERAPAN MODEL POPULASI KONTINU PADA PERHITUNGAN PROYEKSI PENDUDUK DI INDONESIA (STUDI KASUS: PROVINSI JAWA TIMUR). E-Jurnal Matematika, 9(4), 229.
- BPS Kota Banda Aceh. 2023. *Banda Aceh Dalam Angka 2023*. Banda Aceh: Badan Pusat Statistik Kota Banda Aceh.
- Daci, A., & Tola, S. 2018. Application Of Laplace Transform In Finance. *International Scientific Journal, Scientific Technical Union Of Mechanical Engineering*, "Industry 4.0" Issn (Print) 2535-0986, Issn (Web) 2603-2929, Year II, Issue 4, pp. 130-133.
- Kurniawan, A., Holisin, I., & Kristanti, F. 2017. Aplikasi Persamaan Diferensial Biasa Model Eksponensial dan Logistik pada Pertumbuhan Penduduk Kota Surabaya. *MUST: Journal of Mathematics Education, Science and Technology*. 2(1). 129-141.
- Lim, S. 2016. Pengertian dan Pembahasan tentang transformasi Laplace Serta Pengaplikasiannya: teknik Elektro. Universitas Internasional Batam, 2.
- Nuraeni, Zuli. 2015. Aplikasi Persamaan Diferensial dalam Estimasi Jumlah Populasi. *Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*. 5(1). 9-16.

- Ofori, T, dkk. 2013. Mathematical Model of Ghana's Population Growth, *International Journal of Modern Management sciences*. 2(2). 57-66.
- Pratiwi, C. D. 2020. Aplikasi Persamaan Diferensial Model populasi Logistik untuk Mengestimasi Penduduk di kota Balikpapan. *AdMathedu*, 10(1), 63-76.
- Ramadhan, M. H., & Idami, Z. (2020). Pengendalian laju Pertumbuhan penduduk melalui Program Keluarga Berencana di Kota Banda aceh. *Journal of Governance and social Policy*, 1(1), 47-57.
- Zabadi, A., M., Assaf, R., & Kanan, M. 2017. A Mathematical and Statistical Approach for Predicting the Population Growth. *World Wide Journal of Multidisciplinary Research and Development*. 3(7). 50-59.