

Penerapan Teorema Residu Cauchy dalam Integral Tak Wajar

Safiatun Hanim^{1,*}, Eva Murida¹, Rizka Aulia Ramadhani¹, Syarifah Meurah Yuni¹, Intan Syahrini¹

¹Program Studi Matematika, Universitas Syiah Kuala, Aceh

*Corresponding email: alfathahanim@gmail.com

ARTICLE INFO

Article History

Received : 06-06-2024

Revised : 06-10-2024

Accepted : 07-10-2024

Keyword

Improper Integrals,
Cauchy's residue
theorem, Definite
Integrals.

ABSTRACT

This article discusses the application of Cauchy's Residue Theorem to improper integrals of real functions. The theorem states that the integral along a simple closed contour is equal to $2\pi i$ times the sum of the residues of the function at single points located inside the contour. Furthermore, the article describes various methods for determining the residues, including the use of Laurent series and Taylor series. In addition, Jordan's lemma is also referenced in this article. Cauchy's Residue Theorem on improper integrals can be employed to resolve integrals that are challenging to compute using traditional real analysis methods. By identifying the residue of the integral at a singularity within a closed contour, the integral along the contour can be evaluated. The application of the residue theorem to improper integrals can be expressed in a specific form to facilitate calculation. This method offers several advantages over conventional methods. Some of the sources consulted in the preparation of this article include the following publications: Complex Analysis, Residue Theorem and Its Applications, and Calculus Applications in Physics Lectures.

©2024 TJoMA. All rights reserved.

1. PENDAHULUAN

Matematika adalah salah satu cabang ilmu pengetahuan yang mempunyai banyak keunggulan, salah satunya adalah penerapan konsep kalkulus atau prinsip integral pada kehidupan sehari-hari. Konsep kalkulus, seperti teori integral memiliki peran penting dalam matematika dan bidang lain seperti fisika, teknik, ekonomi, dan statistik (Arfken & Weber, 2005). Dalam bidang fisika, penerapan integral diberikan pada mata kuliah fisika sebagai materi kalkulus yang meliputi integral, diferensial atau integral tak tentu, dan nilai batas. Ini digunakan sebagai konsep materi graf, hukum II Newton mengenai gerak dan sebagainya (Toto, 2018). Dalam bidang teknik, penerapan integral dilakukan untuk menghitung tegangan dalam struktur dan laju aliran dalam fluida. Dalam bidang ekonomi, integral digunakan untuk menghitung pendapatan total dan biaya total sehingga dapat mencari tingkat *output* yang memaksimalkan keuntungan Perusahaan. Juga dalam bidang statistik, integral digunakan untuk menghitung fungsi kepadatan probabilitas, nilai ekspektasi, dan varians (Dai & Zhang, 2021).

Setelah melihat betapa pentingnya integral dalam kehidupan sehari-hari, juga diikuti dengan perkembangan dunia pendidikan yang semakin lama semakin pesat, sangat penting bagi mahasiswa untuk menemukan metode atau teknik yang tepat terkait dengan materi integral, khususnya dalam menyelesaikan persoalan atau permasalahan dalam integral tak wajar. Integral tak wajar merupakan jenis integral yang batas-batasnya tak terhingga atau yang fungsi integrannya tidak terbatas pada beberapa titik dalam interval integrasi.

Untuk menyelesaikan integral tak wajar, salah satu metode yang efektif adalah menggunakan teorema residu dari analisis kompleks. Teorema residu memungkinkan kita menghitung integral dari fungsi yang memiliki singularitas dengan mengekspresikan integral sebagai jumlah residu dari fungsi tersebut pada titik-titik singularitasnya (Churchill & Brown, 2014). Teorema residu menyatakan bahwa jika f adalah fungsi meromorfik dalam suatu daerah dan memiliki singularitas terisolasi, maka integral kontur f di sekitar kontur tertutup yang

mengelilingi singularitas tersebut dapat dievaluasi menggunakan residu fungsi tersebut pada singularitas. Rumus dasar dari teorema residu adalah:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k)$$

Penerapan integral tak wajar dan teorema residu tidak hanya meningkatkan pemahaman matematis tetapi juga memberikan solusi praktis untuk berbagai masalah nyata, yang mencerminkan pentingnya penguasaan konsep ini bagi mahasiswa di berbagai disiplin ilmu. Dengan perkembangan dunia pendidikan yang semakin pesat, pemahaman mendalam tentang metode ini menjadi sangat penting bagi mahasiswa untuk mampu menyelesaikan persoalan integral tak wajar dengan efektif dan efisien (Rudin, 1976).

2. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan di dalam penulisan artikel ini adalah library exploration method atau metode kepustakaan yang terdiri dari:

- Merumuskan metode untuk menghitung integral tak wajar pada fungsi real dengan menggunakan pendekatan teorema residu, dengan memanfaatkan sifat analitik fungsi tersebut.
- Setelah metode perhitungan integral tak wajar pada fungsi real dengan pendekatan teorema residu dirumuskan, hasilnya akan dibandingkan dengan hasil perhitungan menggunakan metode konvensional. Dalam perhitungan integral tak wajar pada fungsi real dengan metode konvensional, digunakan konsep integral substitusi.
- Menerapkan rumus yang diperoleh dari pendekatan teorema residu pada integral tak wajar fungsi real yang tidak dapat diselesaikan dengan metode konvensional.
- Menarik kesimpulan dari hasil perhitungan tersebut.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada pembahasan ini akan dipaparkan suatu teorema atau metode yang dapat memudahkan dalam penyelesaian permasalahan integral tak wajar pada fungsi real. Namun sebelum itu, diberikan terlebih dahulu mengenai teorema residu.

Teorema 3.1 (Ward Brown & Churchill, 2009) jika suatu fungsi $f(z)$ bersifat analitik, baik didalam maupun pada kontur tertutup sederhana C , dengan jumlah singularitas terisolasi yang terbatas, maka integralnya disekitar C sama dengan $2\pi i$ mengalikan jumlah residu fungsi pada singularitas yang bersifat interior ke kontur C , yaitu:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k).$$

Karena titik singular $z_1, z_2, \dots, z_n$ merupakan pusat dari kontur tertutup sederhana berorientasi positif C_k yang berada pada interior kontur tertutup sederhana C , maka terdapat $r_k > 0$, ($j = 1, 2, \dots, m$), sedemikian sehingga $f(z)$ analitik pada setiap anggota $N_r(z_k)$.

Dengan menggunakan perluasan teorema Cauchy-Goursat pada daerah terhubung berganda maka berlaku:

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_k} dz = \left(\sum_{k=1}^n \int_{C_k} \frac{f(z)}{z - z_k} dz \right).$$

Pada kontur C_k , z_1 merupakan salah satu titik singular, sehingga dengan menggunakan penjabaran deret laurent, diperoleh:

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z - z_0)^{-n}$, $\forall z \in N_{r_1}(z_1)$, dengan:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n-1}} dz.$$

Perhatikan bahwa untuk setiap b_n , ekspresi dalam deret Laurent identik dengan yang ada di deret Taylor. integral $f(z)$ sepanjang kontur dapat diperoleh dengan menghitung b_1 . Pada saat $n = 1$, pada bagian b_n di peroleh:

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z) dz.$$

Residu fungsi f pada titik z_0 dilambangkan dengan $Res(f(z), z_0)$, yaitu:

$$Res(f(z), z_0) = b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z) dz.$$

Untuk membuktikan teorema Residu Cauchy, dimulai dengan membuat lingkaran yang berpusat pada setiap titik tunggal terisolasi z_k dengan jari-jari yang cukup kecil yang memungkinkan setiap lingkaran C_k terkandung dalam kontur C dan tidak saling berpotongan. Karena ada sejumlah titik singular terisolasi yang terbatas, ini dapat dicapai. sehingga dapat digunakan segmen garis untuk menghubungkan semua lingkaran dan kontur C untuk menghasilkan dua kontur tertutup sederhana. Karena titik singular dihilangkan, $f(z)$ analitik di dalam dan pada dua kontur baru ini. Dengan menerapkan teorema Cauchy-Goursat, integral sepanjang dua kontur ini sama dengan nol, dan hasil ini juga dapat dinyatakan dengan:

$$\int_c f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z) dz = 0.$$

Dengan menggunakan definisi residu, dapat disimpulkan bahwa $\int_{C_k} f(z) dz = 2\pi i Res(f(z), z_k)$ untuk setiap C_k , dan dengan demikian $\int_c f(z) dz$ sama dengan jumlah residu pada setiap titik singular.

Metode untuk Menentukan Residu

Jika deret Laurent dari fungsi $f(z)$ pada titik singular memenuhi $b_n \neq 0$ dan $b_k = 0$ untuk semua $k \geq n + 1$, maka titik singular didefinisikan sebagai kutub orde n . Jika z_0 adalah kutub orde n dari f , maka f dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n},$$

di mana $g(z)$ adalah analitik dan bukan nol pada z_0 , dan

$$Res(f(z), z_0) = \frac{g^{(n-1)}(z)}{(n-1)!}.$$

Untuk semua interger $n \geq 1$.

Hal ini dilanjutkan untuk mempertimbangkan semua istilah dalam deret Laurent $f(z)$. Mengalikan setiap suku dengan $(z - z_0)^n$, deret polinomial tak terbatas sehubungan dengan $(z - z_0)$ dapat diperoleh, yang analitik di seluruh bidang kompleks. Ini merupakan fungsi $g(z)$ yang diperlukan. Selanjutnya, karena $g(z)$ adalah analitik, maka $g(z)$ harus memiliki ekspansi Taylor pada titik z_0 . Kemudian membagi setiap suku dengan $(z - z_0)^n$, yang menghasilkan

deret Laurent $f(z)$ pada z_0 . Kali ini, koefisien suku pangkat -1 menjadi $\frac{g^{n-1}(z)}{(n-1)!}$. Menurut definisi residu, ini adalah residu f pada z_0 .

Jika $f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = f^{(2)}(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$, dan $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, maka $f(z)$ dapat dinyatakan dalam bentuk $(z - z_0)^n g(z)$, dimana $g(z)$ adalah analitik dan bukan nol pada z_0 . Karena f adalah analitik, maka deret Taylor-nya pada titik z_0 . Suku n pertama semuanya sama dengan nol, jadi $(z - z_0)$ dapat diambil sebagai faktor umum.

Selanjutnya, metode untuk menghitung residu ditunjukkan di bawah ini.

Jika $f(z)$ dan $g(z)$ keduanya analitik pada z_0 , dan $f(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = 0$, $g^{(1)}(z_0) \neq 0$ maka

$$\text{Res}\left(\frac{f(z)}{g(z)}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g^{(1)}(z_0)}.$$

Dari pembahasan di atas, $g(z) = (z - z_0) h(z)$, di mana $h(z)$, adalah analitik dan bukan nol pada z_0 . Jadi $\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z)}{(z - z_0) h(z)}$. Misalkan $p(z) = f(z) h(z)$, jadi $p(z)$ adalah analitik pada z_0 sehingga memiliki deret Taylor pada z_0 . Oleh karena itu diperoleh:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{p(z_0) + p^{(1)}(z_0)(z - z_0) + \frac{p^{(2)}(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \dots}{(z - z_0)}.$$

Sehingga residunya adalah $p(z_0)$. Karena $g(z) = (z - z_0) h(z)$ dan $g^{(1)}(z) = h(z_0)$, residunya sama dengan

$$p(z_0) = \frac{f(z_0)}{h(z_0)} = \frac{f(z_0)}{g^{(1)}(z_0)}.$$

Teorema lainnya

Lemma Jordan menyatakan bahwa jika f kontinu untuk semua z yang memenuhi $R_0 \leq |z| < \infty$, $\text{Im}(z) \geq 0$, dan $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, maka untuk setiap $k > 0$,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{ikz} f(z) dz = 0,$$

Dengan C_R menunjukkan setengah lingkaran $Re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi, R \geq R_0$).

Jika fungsi $f(z)$ kontinu pada daerah C , di mana $C = \{z: z = a + Re^{i\theta}, 0 < R \leq R_0, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + a\}$ dan $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) dz = L$, maka

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = iLa,$$

dimana $C_R = \{z: z = a + Re^{i\theta}, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + a \text{ dan berorientasi positif}\}.$

Contoh :

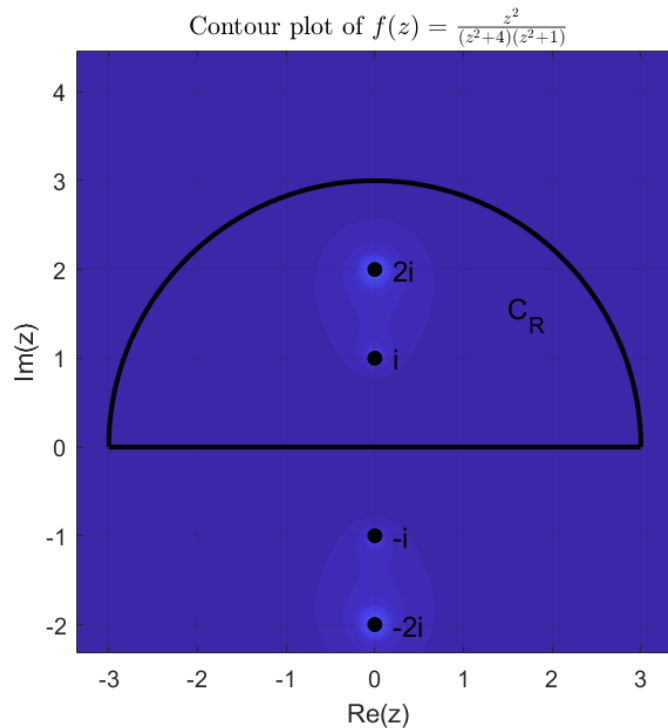
$$I = P.V \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)(x^2+1)} dx.$$

Integral ini dapat dihitung dengan mengintegrasikannya pada bidang kompleks. Misalkan $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+4)(z^2+1)}$. Titik singularnya adalah $\pm 2i$ dan $\pm i$. Dengan kesimetrian, hanya dapat mempertimbangkan titik singularnya di atas sumbu x . Dengan menggunakan rumus residu:

$$p(z_0) = \frac{f(z_0)}{h(z_0)} = \frac{f(z_0)}{g^{(1)}(z_0)},$$

maka diperoleh :

$$\text{Res}(f(z), 2i) = \frac{z^2}{(z^4 + 5z^2 + 4)} \Big|_{z=2i} = -\frac{1}{3}i, \text{Res}(f(z), i) = \frac{1}{6}i.$$



Gambar 1. Kontur integral pada contoh 1

Kontur tertutup yang terdiri dari segmen garis dan setengah lingkaran jari-jari R , lihat Gambar 1. Di sini, $C = [-R, R] \cup C_R$, dimana C_R menunjukkan setengah lingkaran. Hanya $2i$ dan i yang interior ke kontur. Dengan menerapkan teorema residu Cauchy,

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R f(z)dz + \int_{C_R} f(z)d(z) &= 2\pi i (\text{Res}(f(z), 2i) + \text{Res}(f(z), i)) \\ &= 2\pi i \left(-\frac{1}{6}i \right) = \frac{\pi}{3}, \end{aligned}$$

yang independen dari R .

$$|f(z)| = \left| \frac{z^2}{(z^2+4)(z^2+1)} \right| = \frac{R^2}{|z^2+4||z^2+1|} \leq \frac{R^2}{||z^2|-4||z^2|-1|} = \frac{R^2}{|R^2-4||R^2-1|} = \frac{R^2}{(R^2-4)(R^2-1)}.$$

Ketika $R \rightarrow +\infty$, suku pertama menjadi $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, sedangkan untuk suku kedua,

$$\left| \int_{C_R} f(z)d(z) \right| \leq \int_{C_R} |f(z)|d(z) \leq \pi R \frac{R^2}{(R^2-4)(R^2-1)} = \frac{R^3}{(R^2-4)(R^2-1)},$$

yang cenderung nol. Oleh karena itu, hasil akhirnya adalah

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} P.V. \int_{-R}^R f(z)dz = \frac{\pi}{3}.$$

4. KESIMPULAN

Banyak integral tak wajar yang sulit dihitung dengan menggunakan metode analisis nyata, dengan menerapkan teorema residu Cauchy dapat memberikan solusi yang lebih sederhana. Untuk menerapkan teorema residu Cauchy, residu integral pada singularitas yang berada di dalam kontur terlebih dahulu dicari, kemudian integral sepanjang keseluruhan kontur tertutup sederhana dapat dievaluasi. Kontur ini selalu terdiri dari segmen garis dan sektor lingkaran. Dalam banyak kasus, hanya bagian kontur yang berada pada sumbu real yang terkait dengan integral tertentu pada domain real, dan bagian lainnya harus dihilangkan dengan membuktikan

kecenderungannya ke suatu nilai tertentu yang paling sering bernilai nol. Aplikasi teorema residu pada integral tak wajar dirumuskan dalam bentuk:

$$\int_{-R}^R f(z)dz + \int_{C_R} f(z)d(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k).$$

Dengan menggunakan teorema residu, perhitungan integral tak wajar lebih mudah dilakukan, dan memiliki beberapa keunggulan dibandingkan metode konvensional.

DAFTAR PUSTAKA

- Arfken, G., & Weber, H. (2005). *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier Academic Press.
- Brown, J. W., & Churchill, R. V. (2009). *Complex variables and applications* (8th ed.). Library of Congress Cataloging-in-Publication Data.
- Churchill, R. V., & Brown, J. W. (2014). *Complex Variables and Applications*. McGraw-Hill Education.
- Dai, X., & Zhang, Y. (2021). Applications of Integrals in Economics and Statistics. *Journal of Mathematical Economics*. 5(1), 12-20.
- Rainwater, G. (2007) Residue Theorems and Their Applications: Computing Integrals Once Thought Impossible to Evaluate Analytically. *Capstone Projects and Master's Theses*, 2023-25.
- Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill.
- Stewart, I., & Tall, D. (2018). *Complex Analysis* (2nd ed.). Cambridge University Press.
- Toto. (2018). Aplikasi Kalkulus dalam perkuliahan fisika. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika (SNMPM)*, 2(1), 26-33.