

Struktur Lapisan Pemahaman Konsep Turunan Fungsi Mahasiswa Calon Guru Matematika

Viktor Sagala

Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Dr. Soetomo, Surabaya
Email: viktor.sagala@unitomo.ac.id

Abstract. *Prospective mathematics teachers should have met the Pirie-Kieren model of understanding indicators, to become professional teachers. The purpose of this research is to describe the layers of understanding structure that is filled by students of mathematics teacher prospectives. The description is based on a model hypothesized by Pirie-Kieren. Research subjects selected from female and male mathematics teacher prospective students have been given the task of understanding the concept of derivative functions and interviewed. Data collected from students' answers from worksheets before the interview, students' answers from worksheets during interviews, and interview transcripts. After the data were analyzed qualitatively, the description of the understanding layer structure of two subjects grouped by the original Pirie-Kieren Model was obtained. The subjects of female had met the indicators of primitive knowing, then there are the processes of image doing and image reviewing on the layer structure of image making towards image having, then image seeing and image saying on the layer of image having to property noticing, then there are the processes of property predicting and property recording on the layer of property noticing towards formalizing, then there are the processes of method applying and method justifying on the layer of formalizing towards observing, then there are the processes of future identifying and feature prescribing on the layer of observing towards structuring, and there are the processes of theorem conjecturing and theorem proving on the layer of structuring towards inventising. She almost fulfilled the inventising layer. Male subjects also meet the same understanding indicators as women. Both subjects have almost fulfilled a layer of creation, we called inventisingoid.*

Keywords: *understanding, understanding layers, structure of layers, structure of understanding, mathematic teacher prospectives.*

Pendahuluan

Seorang calon guru matematika seharusnya memiliki lapisan pemahaman yang lengkap, agar kelak menjadi guru yang profesional. Pirie-Kieren (1994) telah menghipotesiskan bahwa pemahaman siswa terdiri dari delapan lapisan, yaitu pengetahuan dasar (*primitive knowing*), pembuatan gambaran (*image making*), pemilikan gambaran (*image having*), perhatian sifat-sifat (*property noticing*), pemformalan (*formalizing*), pengamatan (*observing*), penstrukturan (*structuring*) dan penciptaan (*inventising*).

Pada era selanjutnya para peneliti menambahkan beberapa indikator terhadap model yang dihipotesiskan Pirie-Kieren. Para ahli peneliti yang menambahkan indikator itu diantaranya Meel (2005), Manu (2005), Martin, LaCroix, and Fownes (2005), Parameswaran (2010), sehingga diperoleh Model Pirie-Kieren Modifikasi, sementara yang lama disebut Model Pirie-Kieren Orisinal. Meel menghubungkan antara lapisan pemahaman dengan teori APOS (Dubinsky & MacDonald, 2001). Meel menyelaraskan lapisan pengetahuan dasar dan pembuatan gambaran dengan aksi, menyelaraskan pemilikan gambaran dan pemilikan gambaran dengan

prosedur, serta menyetarakan pemformalan dan pengamatan dengan objek, dan menyetarakan lapisan penstrukturan dan penciptaan dengan struktur.

Menurut Mousley (2005) ada tiga model pemahaman matematis, yaitu pemahaman sebagai kemajuan terstruktur, pemahaman sebagai bentuk-bentuk mengetahui sesuatu dan pemahaman sebagai proses. Pemahaman sebagai kemajuan terstruktur menggambarkan bahwa perkembangan pemahaman yang mengikuti kecenderungan konstruktivisme, yaitu proses mengkonstruksi pengetahuan dari dasar ke tingkat yang lebih tinggi. Piaget (dalam Mousley, 2005) menjelaskan perkembangan pemahaman sebagai pertumbuhan kesadaran hubungan, eksperimen berpikir, internalisasi tindakan yang melibatkan aktivitas sensori motor dan bertujuan untuk mengkonstruksi objek.

Maslow (dalam Mousley, 2005) menyatakan bahwa pemahaman sebagai bentuk-bentuk mengetahui, membedakan dua bentuk pemahaman yaitu pemahaman *scientific* dan *suchness*. Pemahaman *scientific* adalah pikiran rasional yang diturunkan dari penjelasan sah, sementara itu pemahaman *suchness* bergantung pada pengalaman kontekstual. Misalnya anak SD memahami sifat komutatif perjumlahan bilangan asli ketika mengamati dan melakukan penggabungan 2 kelereng dengan 3 kelereng. Hal itu ternyata sama dengan hasil penggabungan 3 kelereng dengan 2 kelereng yaitu hasilnya adalah 5 kelereng.

Pegg dan Tall (2005) mengidentifikasi dua jenis teori pertumbuhan kognitif yaitu teori global pertumbuhan jangka panjang (*global theory of long term growth*) individu, seperti teori tahapan perkembangan kognitif dari Piaget, dan teori lokal pertumbuhan konseptual seperti teori APOS (aksi, proses, objek, skema) dari Dubinsky & MacDonald (2001). Jangkauan teori global dimulai dari interaksi fisik individu dengan dunia sekeliling, kemudian ke penggunaan bahasa dan simbol menuju ke bentuk abstrak. Dalam hal ini Pegg dan Tall (2005) juga menyandingkan empat teori perkembangan kognitif yaitu 1) tahapan sensori motor, praoperasional, operasional konkrit dan operasional formal dari Piaget, 2) level rekognisi, analisis, urutan, deduksi dan rigor dari Van Hiele, 3) sensori motor, ikonik, konkrit, simbolik, formal dan *post formal* dari Model SOLO, serta 4) enaktif, ikonik dan simbolik dari Bruner.

Teori lokal difokuskan pada siklus dasar pertumbuhan dalam pembelajaran suatu konsep. Misalnya model SOLO difokuskan pada siklus tiga level (UMR) yaitu *unistructural* (U), *multistructural* (M), dan *relational* (R). Penerapan model SOLO minimal mengandung dua siklus UMR dalam setiap model. Respon tingkat R dalam siklus satu berkembang untuk respon tingkat U baru pada siklus berikutnya. Menurut Susiswo (2014), hal ini menjadi dasar untuk mengeksplorasi konsep yang diperoleh dan juga menjelaskan perkembangan kognisi siswa. Siklus dua menawarkan tipe perkembangan yang fokus utamanya pada pendididkan dasar dan

menengah. Selanjutnya, menurut Pegg dan Tall (2005) teori lokal lain adalah prosedur, proses terintegrasi dan entitas dari Davis serta APOS dari Dubinsky.

Menurut Bruner (dalam Tall, 1992) ada tiga bentuk representasi mental, yaitu enaktif (*enactive*), ikonik (*iconic*) dan simbolik (*symbolic*). Representasi itu tumbuh secara berurutan dalam individu, mulai dari enaktif, kemudian ikonik dan akhirnya simbolik. Representasi simbolik ini mempunyai kekuatan sendiri yang kemudian kurang bergantung kepada representasi enaktif dan ikonik. Piaget (dalam Dubinsky & MacDonald, 2001) juga membangun teori pemerolehan atau pengkonstruksian yang hampir sama dengan Bruner, yang disebutnya teori abstraksi. Teori abstraksi Piaget membedakan tiga macam abstraksi yaitu abstraksi empirik, *pseudo*-empirik dan reflektif. Abstraksi yang pertama yaitu empirik memperoleh pengetahuan dari sifat-sifat objek. Dubinsky & MacDonald (2001) menafsirkan bahwa melalui abstraksi empirik, individu harus melakukan aksi yang sifatnya eksternal terhadap objek. Pengetahuan tentang sifat-sifat itu sendiri bersifat internal dan merupakan hasil konstruksi yang dibuat secara internal juga. Abstraksi yang kedua yaitu *pseudo*-empirik dijelaskan oleh Piaget (dalam Dubinsky & MacDonald, 2001) sebagai berikut “*pseudo-empirical abstraction is intermediate between empirical and reflective abstraction and teases out properties that the actions of the subject have introduced into objects*”. Jadi dalam abstraksi *pseudo*-empirik ini tindakan subjek mulai mengarah kepada ketertarikan kepada sifat-sifat yang dimiliki objek.

Menurut Dubinsky & MacDonald (2001), abstraksi reflektif merupakan sebuah konsep yang diperkenalkan oleh Piaget untuk menggambarkan pembangunan struktur *logico*-matematika oleh seorang individu selama perkembangan kognitif. Dua pengamatan penting yang dilakukan oleh Piaget adalah yang pertama abstraksi reflektif tidak memiliki awal mutlak tetapi hadir di usia yang sangat awal dalam koordinasi struktur sensori-motor (Beth & Piaget, 1966 dalam Dubinsky & MacDonald, 2001) dan kedua, bahwa abstraksi itu secara kontinu berkembang melalui matematika yang lebih tinggi. Sejauh itu seluruh sejarah perkembangan matematika dari zaman dahulu sampai sekarang dapat dianggap sebagai contoh dari proses abstraksi reflektif (Piaget, 1985 dalam Dubinsky & MacDonald, 2001)

Pada dasarnya siswa lebih mudah memahami konsep yang konkret, tetapi dengan menggunakan simbol dan notasi matematika siswa dapat merepresentasikan pemahamannya. Oleh sebab itu, guru dapat memberikan pembelajaran dengan mengajarkan konsep matematika yang abstrak (Halat & Peker, 2011: 2). Representasi matematis merupakan proses pemodelan sesuatu dari dunia nyata ke dalam konsep dan simbol-simbol yang abstrak. Ada lima jenis representasi dalam pendidikan matematika, yaitu objek dunia nyata, representasi konkret, representasi simbol aritmatika, representasi bahasa lisan atau verbal, dan representasi gambar atau grafik (Hwang et al, 2007: 192-197).

Representasi adalah model atau bentuk pengganti dari suatu situasi masalah yang digunakan untuk menemukan solusi. Sebagai contoh, suatu masalah dapat direpresentasikan dengan obyek, gambar, kata-kata, atau simbol matematika (Jones & Knuth, 1991). Ada empat gagasan yang digunakan dalam memahami konsep representasi, yaitu: 1) representasi dapat dipandang sebagai abstraksi internal dari ide-ide matematika atau skemata kognitif yang dibangun oleh siswa melalui pengalaman; 2) sebagai reproduksi mental dari keadaan mental yang sebelumnya; 3) sebagai sajian secara struktur melalui gambar, simbol ataupun lambang; 4) sebagai pengetahuan tentang sesuatu yang mewakili sesuatu yang lain. Representasi merupakan proses pengembangan mental yang sudah dimiliki seseorang, yang terungkap dan divisualisasikan dalam berbagai model matematika, yakni verbal, gambar, benda konkret, tabel, model-model manipulatif atau kombinasi dari semuanya (Schultz & Waters, 2000).

Menurut Fitri, Munzir, dan Duskri (2017), kemampuan representasi matematis siswa dapat ditingkatkan melalui model penerapan pembelajaran berbasis masalah. Selanjutnya, menurut Sagala (2017), pemahaman konsep matematika seseorang merupakan kemampuan melakukan kegiatan mengabstraksi, mengontruksi dan merepresentasikan konsep tersebut.

Kerangka teoritis yang dihipotesiskan oleh Pirie-Kieren (1994) terdiri atas delapan lapisan pemahaman. Setelah beberapa indikator ditambahkan oleh para ahli terhadap model maka lapisan demi lapisan dapat dijelaskan sebagai berikut. Lapisan pertama pengetahuan dasar (*primitive knowing*) merupakan usaha awal yang dilakukan oleh siswa dalam memahami definisi baru, membawa pengetahuan sebelumnya ke lapisan pemahaman selanjutnya melalui aksi yang melibatkan definisi atau merepresentasikan. Lapisan kedua pembuatan gambaran (*image making*) merupakan tahapan dimana siswa membuat pemahaman dari pengetahuan sebelumnya dan menggunakannya dalam pengetahuan baru. Lapisan pemahaman ketiga pemilikan gambaran (*image having*) merupakan tahapan dimana siswa sudah memiliki gambaran mengenai suatu topik dan membuat gambaran mental mengenai topik itu tanpa harus mengerjakan contoh-contoh (Pirie-Kieren, 1994; Manu, 2005). Lapisan pemahaman keempat perhatian sifat-sifat (*property noticing*) merupakan tahapan dimana siswa mampu mengkombinasikan aspek-aspek dari sebuah topik untuk membentuk sifat spesifik terhadap topik itu. Lapisan pemahaman kelima pemformalan (*formalizin*) merupakan tahapan dimana siswa membuat abstraksi suatu konsep matematika berdasarkan sifat-sifat yang muncul. Siswa mampu memahami sebuah definisi atau algoritma formal konsep matematika (Parameswaran, 2010). Lapisan pemahaman keenam pengamatan (*observing*) merupakan tahapan dimana siswa mengkordinasikan aktivitas formal pada level pemformalan sehingga mampu menggunakannya pada permasalahan terkait yang dihadapinya, siswa juga mampu mengaitkan pemahaman konsep matematika yang dimilikinya dengan struktur pengetahuan baru (Parameswaran, 2010).

Lapisan pemahaman ketujuh penstrukturan (*structuring*) merupakan tahapan dimana siswa mampu mengaitkan hubungan antara teorema satu dengan teorema lainnya dan mampu membuktikannya dengan argumen yang logis. Siswa juga mampu membuktikan hubungan antara teorema yang satu dengan lainnya secara aksiomatik. Lapisan pemahaman kedelapan **Peciptaan** merupakan tahapan dimana siswa memiliki sebuah pemahaman terstruktur lengkap dan mampu menciptakan pertanyaan-pertanyaan baru yang tumbuh menjadi sebuah konsep yang baru. Pemahaman matematis siswa tidak terbatas dan melampaui struktur yang ada sehingga mampu menjawab pertanyaan “*what if?*” (Meel, 2003).

Model yang dipakai untuk menganalisis lapisan pemahaman dalam tulisan ini adalah model pemahaman Pirie-Kieren orisinil. Menurut model orisinil ini, masing-masing lapisan mulai dari kedua hingga keenam memiliki struktur berupa pasangan aksi (*acting*) dan ekspresi (*expressing*) yaitu proses *image doing* dan *image reviewing* pada struktur lapisan pembuatan gambaran menuju lapisan pemilikan gambaran, ada *image seeing* dan *image saying* pada lapisan pemilikan gambaran menuju lapisan perhatian sifat-sifat, kemudian proses *property predicting* dan *property recording* pada lapisan perhatian sifat-sifat menuju lapisan pemformalan, kemudian proses *method applying* dan *method justifying* pada lapisan pemformalan menuju lapisan pengamatan, kemudian proses *feature identifying* dan *feature prescribing* pada lapisan pengamatan menuju lapisan penstrukturan, serta proses *theorem conjecturing* dan *theorem proving* pada lapisan penstrukturan menuju lapisan penstrukturan (Pirie-Kieren, 1994). Pertanyaan penelitian ini adalah “Bagaimana struktur lapisan pemahaman mahasiswa calon guru matematika?” Sesuai dengan itu, tujuan penelitian ini adalah untuk mendeskripsikan struktur lapisan pemahaman mahasiswa calon guru matematika.

Metode

Pendekatan penelitian yang dilakukan adalah deskriptif kualitatif. Instrumen utama adalah peneliti sendiri, dan instrumen bantu adalah soal turunan fungsi. Subjek penelitian yang dipilih adalah masing-masing seorang mahasiswa perempuan dan laki-laki yang berkemampuan matematika tinggi. Subjek dipilih dari 35 orang mahasiswa calon guru matematika, yaitu mahasiswa semester IV Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Dr. Soetomo Surabaya.

Setiap subjek diberikan tugas untuk mengerjakan seperangkat soal yang telah dipersiapkan. Setelah seperangkat soal selesai dikerjakan oleh subjek, maka diperoleh lembar kerja subjek sebelum wawancara, selanjutnya dilakukan wawancara berbasis tugas. Pada saat wawancara subjek juga menuliskan jawabannya sesuai dengan pertanyaan pewawancara, sehingga diperoleh data berupa transkrip wawancara dan lembar kerja pada saat wawancara.

Dengan demikian, ada tiga sumber data yang diperoleh, yaitu lembar kerja sebelum wawancara, lembar kerja pada saat wawancara dan transkrip wawancara. Selanjutnya data dianalisis secara kualitatif dengan langkah-langkah mengkategorikan atau mengklasifikasi, mereduksi, menyajikan dan menafsirkan data hingga mengambil kesimpulan (Moleong, 2010).

Hasil dan Pembahasan

Struktur pemahaman pada tiap lapisan yang dipenuhi oleh subjek perempuan dapat disajikan berikut ini.

Pemahaman meliputi menggunakan sifat-sifat fungsi polinom, menggunakan sifat-sifat limit fungsi, menentukan turunan pertama fungsi polinom berderajat tiga, misalnya $f(x)=2x^3-3x^2+2$ yaitu $f'(x)=6x^2-6x$, menentukan turunan kedua fungsi polinom berderajat tiga, misalnya $f(x)=2x^3-3x^2+2$ yaitu $f''(x)=12x-6$, menyebutkan pengertian turunan fungsi, dan menuliskan definisi turunan fungsi sebagai limit hasil bagi selisih, merupakan indikator-indikator lapisan pengetahuan dasar.

Pemahaman pada lapisan pembuatan gambaran yang terdiri dari memisahkan fungsi polinom berderajat tiga, misalnya $f(x)=2x^3-3x^2+2$ menjadi tiga fungsi sederhana, yaitu $2x^3$, $-3x^2$ dan 2, menggunakan definisi turunan fungsi sebagai limit hasil bagi selisih untuk mencari turunan fungsi sederhana, menjabarkan bentuk kuadrat suku dua dalam proses pembuktian turunan fungsi polinom berderajat dua, menjabarkan bentuk pangkat tiga suku dua dalam proses pembuktian turunan fungsi polinom berderajat tiga, menjabarkan limit fungsi dalam proses pembuktian turunan fungsi konstanta, polinom sederhana berderajat dua dan berderajat berderajat tiga, merupakan indikator-indikator *image doing*. Sementara itu, pemahaman yang meliputi: mengenali fungsi polinom yang tersusun atas beberapa fungsi polinom sederhana, misalnya $f(x)=2x^3-3x^2+2$ yang tersusun atas tiga fungsi sederhana sehingga dapat dipisahkan menjadi $2x^3$, $-3x^2$ dan 2, mengenali hubungan antara limit fungsi dan definisi turunan fungsi sebagai limit hasil bagi selisih, sehingga dapat menerapkannya dalam proses menentukan turunan fungsi konstanta, mengenali hubungan antara bentuk pangkat dua suku dua dan definisi turunan fungsi sebagai limit hasil bagi selisih, sehingga dapat menerapkannya dalam proses menentukan turunan fungsi polinom sederhana berderajat dua, mengenali hubungan antara bentuk pangkat tiga suku dua dan definisi turunan fungsi sebagai limit hasil bagi selisih, sehingga dapat menerapkannya dalam proses menentukan turunan fungsi polinom sederhana berderajat tiga, merupakan indikator dari *image reviewing*.

Pemahaman pada lapisan pemilihan gambaran yang terdiri dari menerapkan definisi turunan fungsi sebagai limit hasil bagi selisih dalam pembuktian bahwa turunan pertama dari fungsi konstanta adalah 0, menerapkan definisi turunan fungsi sebagai limit hasil bagi

selisih dalam pembuktian bahwa turunan pertama dari fungsi polinom sederhana berderajat tiga adalah fungsi polinom sederhana berderajat dua, menerapkan definisi turunan fungsi sebagai limit hasil bagi selisih dalam pembuktian bahwa turunan pertama dari fungsi polinom sederhana berderajat dua adalah fungsi polinom sederhana berderajat satu, menerapkan definisi turunan fungsi sebagai limit hasil bagi selisih dalam pembuktian bahwa turunan pertama fungsi $f(x)=x^n$ adalah $f'(x)=nx^{n-1}$, menerapkan definisi turunan fungsi sebagai limit hasil bagi selisih dalam pembuktian bahwa turunan pertama dari jumlah fungsi $f(x)=u(x)+v(x)$ yaitu jumlah dari turunan fungsi $f'(x)=u'(x)+v'(x)$, merupakan indikator dari *image seeing*. Sementara itu, pemahaman yang terdiri dari menyadari bahwa definisi turunan fungsi sebagai limit hasil bagi selisih layak diterapkan dalam pembuktian bahwa turunan pertama dari fungsi konstanta adalah 0, menyadari bahwa definisi turunan fungsi sebagai limit hasil bagi selisih layak diterapkan dalam pembuktian bahwa turunan pertama dari fungsi polinom sederhana berderajat tiga adalah fungsi polinom sederhana berderajat dua, menyadari bahwa definisi turunan fungsi sebagai limit hasil bagi selisih layak diterapkan dalam pembuktian bahwa turunan pertama dari fungsi polinom sederhana berderajat dua adalah fungsi polinom sederhana berderajat satu, menyadari bahwa definisi turunan fungsi sebagai limit hasil bagi selisih layak diterapkan dalam pembuktian bahwa turunan pertama fungsi $f(x)=x^n$ adalah $f'(x)=nx^{n-1}$, menyadari bahwa definisi turunan fungsi sebagai limit hasil bagi selisih layak diterapkan dalam pembuktian bahwa turunan pertama dari jumlah fungsi $f(x)=u(x)+v(x)$ yaitu jumlah dari turunan fungsi $f'(x)=u'(x)+v'(x)$, merupakan indikator dari *image saying*.

Pemahaman pada lapisan perhatian sifat-sifat yang terdiri dari mengkombinasikan sifat limit jumlah fungsi dengan definisi turunan fungsi sebagai limit hasil bagi selisih untuk membentuk rumus turunan jumlah fungsi $f(x)=x^n$ adalah $f'(x)=nx^{n-1}$, mengkombinasikan sifat limit jumlah fungsi dengan definisi turunan fungsi sebagai limit hasil bagi selisih untuk membentuk rumus turunan jumlah fungsi $f(x)=u(x)+v(x)$ yaitu jumlah turunan fungsi $f'(x)=u'(x)+v'(x)$, merupakan indikator dari *property predicting*. Sementara itu, pemahaman yang terdiri dari mencermati kembali dan mengingat proses kombinasi sifat limit jumlah fungsi dengan definisi turunan fungsi sebagai limit hasil bagi selisih untuk membentuk rumus turunan jumlah fungsi $f(x)=x^n$ adalah $f'(x)=nx^{n-1}$, mencermati kembali dan mengingat proses kombinasi sifat limit jumlah fungsi dengan definisi turunan fungsi sebagai limit hasil bagi selisih untuk membentuk rumus turunan jumlah fungsi $f(x)=u(x)+v(x)$ yaitu jumlah turunan fungsi $f'(x)=u'(x)+v'(x)$, mencermati kesamaan dan perbedaan antara penerapan definisi turunan fungsi sebagai limit hasil bagi terhadap fungsi polinom sederhana berderajat dua, berderajat tiga dan berderajat n (asli), sehingga terbentuk rumus umum turunan fungsi polinom, merupakan indikator dari *property recording*.

Pemahaman pada lapisan pemformalan yang terdiri dari menerapkan metode penentuan turunan fungsi yang sesuai dengan definisi turunan fungsi sebagai limit hasil bagi selisih, menerapkan metode penentuan turunan fungsi yang sesuai dengan definisi turunan fungsi sebagai limit hasil bagi selisih dalam menemukan rumus turunan jumlah fungsi, menerapkan metode penentuan turunan fungsi yang sesuai dengan definisi turunan fungsi sebagai limit hasil bagi selisih dalam menemukan rumus umum turunan fungsi polinom, menerapkan metode yang sesuai dengan prinsip turunan fungsi dalam penentuan titik-titik penting grafik fungsi, menerapkan metode yang sesuai dengan prinsip turunan fungsi untuk mengurutkan langkah-langkah dalam menyusun tabel titik-titik penting yang diperlukan untuk menggambarkan grafik fungsi, merupakan indikator dari *method applying*. Sementara itu pemahaman yang terdiri dari memiliki alasan mengapa menerapkan metode yang sesuai dengan definisi turunan fungsi sebagai limit hasil bagi selisih, memiliki alasan mengapa menerapkan metode penentuan turunan fungsi yang sesuai dengan definisi turunan fungsi sebagai limit hasil bagi selisih dalam menemukan rumus turunan jumlah fungsi, memiliki alasan mengapa menerapkan metode penentuan turunan fungsi yang sesuai dengan definisi turunan fungsi sebagai limit hasil bagi selisih dalam menemukan rumus umum turunan fungsi polinom, memiliki alasan mengapa menerapkan metode yang sesuai prinsip turunan fungsi dalam penentuan titik-titik penting grafik fungsi, memiliki alasan mengapa menerapkan metode yang sesuai prinsip turunan fungsi untuk mengurutkan langkah-langkah dalam menyusun tabel titik-titik penting yang diperlukan untuk menggambarkan grafik fungsi, merupakan indikator dari *method justifying*.

Pemahaman pada lapisan pengamatan yang terdiri dari menemukan ciri khas grafik fungsi polinom berderajat tiga berdasarkan penerapan prinsip turunan fungsi, menemukan berbagai jenis grafik polinom berderajat tiga berdasarkan banyaknya titik potong dengan sumbu-X, menemukan berbagai jenis polinom berderajat tiga berdasarkan banyaknya titik maksimum/minimum, menemukan cara penerapan prinsip-prinsip turunan fungsi untuk menggambarkan grafik berbagai jenis fungsi polinom berderajat empat, menemukan berbagai jenis polinom berderajat empat berdasarkan banyaknya titik potong dengan sumbu-X, menemukan berbagai jenis polinom derajat empat berdasarkan banyaknya titik maksimum/minimum merupakan indikator dari *feature identifying*. Sementara itu, pemahaman yang terdiri dari menerima ciri khas grafik fungsi polinom berderajat tiga berdasarkan penerapan prinsip turunan fungsi, menerima penemuan berbagai jenis grafik polinom berderajat tiga berdasarkan banyaknya titik potong dengan sumbu-X, menerima berbagai jenis polinom berderajat tiga berdasarkan banyaknya titik maksimum/minimum, menerima cara penerapan prinsip-prinsip turunan fungsi untuk menggambarkan grafik berbagai jenis fungsi polinom berderajat empat, menerima berbagai jenis polinom berderajat empat berdasarkan banyaknya titik potong dengan sumbu-X,

menerima berbagai jenis polinom derajat empat berdasarkan banyaknya titik maksimum/minimum, merupakan indikator dari *feature prescribing*.

Pemahaman pada lapisan penstrukturan yang terdiri dari membuat dugaan pembuktian rumus-rumus dasar turunan fungsi, membuat dugaan hubungan antara pembuktian rumus jumlah turunan fungsi dengan turunan fungsi polinom, membuat dugaan sifat-sifat grafik fungsi polinom berderajat tiga, membuat dugaan sifat-sifat grafik fungsi polinom berderajat empat, membuat dugaan kelebihan dan kelemahan menggambar grafik fungsi polinom dengan cara penerapan turunan dan tanpa penerapan turunan, membuat dugaan penerapan prinsip-prinsip turunan dalam menyusun langkah-langkah untuk menggambarkan grafik fungsi polinom berderajat tiga, membuat dugaan penerapan prinsip-prinsip turunan dalam menyusun langkah-langkah untuk menggambarkan grafik fungsi polinom berderajat empat, membuat dugaan pembuktian sifat polinom yang mempunyai paling banyak nilai ekstrim dalam hubungannya dengan rumus turunan fungsi polinom, merupakan indikator dari *theorem conjecturing*. Sementara itu pemahaman yang terdiri dari: merangkai argumen yang logis dalam membuktikan rumus-rumus dasar turunan fungsi dengan argumen yang logis, merangkai argumen yang logis dalam menjelaskan hubungan antara pembuktian rumus jumlah turunan fungsi dengan turunan fungsi polinom, merangkai argumen yang logis dalam membuktikan sifat-sifat grafik fungsi polinom berderajat tiga, merangkai argumen yang logis dalam membuktikan sifat-sifat grafik fungsi polinom berderajat empat, merangkai argumen yang logis dalam menjelaskan kelebihan dan kelemahan menggambar grafik fungsi polinom dengan cara penerapan turunan dan tanpa penerapan turunan, merangkai argumen yang logis dalam penerapan prinsip-prinsip turunan dalam menyusun langkah-langkah prosedur untuk menggambarkan grafik fungsi polinom berderajat tiga dengan argumen yang logis, merangkai argumen yang logis dalam penerapan prinsip-prinsip turunan dalam menyusun langkah-langkah prosedur menggambarkan grafik fungsi polinom berderajat empat dengan argumen yang logis, merangkai argumen yang logis dalam menjelaskan pembuktian sifat polinom yang mempunyai paling banyak nilai ekstrim dalam hubungannya dengan rumus turunan fungsi polinom, merupakan indikator dari *theorem proving*.

Terakhir, pemahaman yang terdiri dari mengajukan pertanyaan berupa soal menggambarkan grafik fungsi polinom berderajat tiga dengan dan tanpa penerapan turunan, belum sepenuhnya merupakan indikator dari lapisan penciptaan. Lapisan pemahaman subjek laki-laki sama dengan struktur yang dimiliki subjek perempuan. Struktur pemahaman kedua subjek hampir memenuhi lapisan penciptaan atau disebut subjek memenuhi *inventisingoid*.

Hasil temuan penelitian ini berbeda dengan hasil penelitian Maharaj yang menggunakan kerangka APOS untuk meneliti pemahaman limit fungsi dengan subjek mahasiswa tanpa

menjelaskan perbedaan laki-laki dan perempuan. Sama juga dengan penelitian Santos dan Thomas yang meneliti pertumbuhan skematik (*schematic growth*) siswa tentang konsep turunan fungsi, yang meneliti kemampuan representasional yang mungkin, karena mereka terlibat dalam memecahkan masalah. Dimensi memahami dikategorikan ke dalam *procedure-oriented*, *process-oriented*, *object-oriented*, *concept-oriented*, dan *versatile*, yang ditandai sesuai dengan berbagai mode representasi yaitu simbolik, grafis, dan numerik. Hasil penelitian ini berbeda juga dengan Iswahyudi (2012) yang meneliti perbedaan metakognisi mahasiswa laki-laki dan perempuan. Menurut hasil penelitian Iswahyudi, pada setiap tahap pemecahan masalah Polya, mahasiswa berkemampuan matematika tinggi, baik laki-laki maupun perempuan memiliki keterlaksanaan metakognisi yang sangat lengkap. Namun tingkat kelengkapan aktivitas metakognisi mahasiswa laki-laki lebih tinggi dibandingkan dengan perempuan. Penelitian ini berbeda juga dengan Asmaningtyas (2012) yang menemukan strategi penyelesaian yang berbeda antara laki-laki dan perempuan ketika menghadapi masalah spasial. Penelitian ini berbeda juga dengan Susiswo (2014) yang meneliti secara khusus *folding back* mahasiswa dalam menyelesaikan masalah limit. Subjek penelitian Susiswo hanya mahasiswa yang melakukan *folding back*, sehingga mahasiswa berkemampuan matematika tinggi tidak terpilih menjadi subjek, berbeda dengan penelitian ini yang memilih subjek dari mahasiswa berkemampuan matematika tinggi. Pencapaian lapisan pemahaman hampir memenuhi *inventising* (*inventisingoid*) merupakan hal baru dalam pencapaian lapisan pemahaman model Pirie-Kieren. Hal seperti itu tidak ada pada hasil penelitian Pirie-Kieren (1994).

Simpulan dan Saran

Berdasarkan hasil analisis, subjek perempuan dan laki-laki memenuhi indikator pemahaman lapisan pengetahuan dasar, ada proses *image doing* dan *image reviewing* pada struktur lapisan pembuatan gambaran menuju lapisan pemilihan gambaran, ada *image seeing* dan *image saying* pada lapisan pemilihan gambaran menuju lapisan perhatian sifat-sifat, ada proses *property predicting* dan *property recording* pada lapisan perhatian sifat-sifat menuju lapisan pemformalan, ada proses *method applying* dan *method justifying* pada lapisan pemformalan menuju lapisan pengamatan, ada proses *feature identifying* dan *feature prescribing* pada lapisan pengamatan menuju lapisan penstrukturan, serta proses *theorem conjecturing* dan *theorem proving* pada lapisan penstrukturan menuju lapisan *inventising*. Kedua subjek hampir memenuhi lapisan *inventising* disebut *inventisingoid*.

Daftar Pustaka

Asmaningtyas, Y.T. (2012). Kemampuan Matematika Laki-laki dan Perempuan. *Jurnal Pendidikan dan Pembelajaran Dasar*, 1(2), 1-15.

- Dubinsky, E., McDonald, M.A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. Dalam D. Holton (Ed.) *The Teaching and Learning of Mathematic at University Level: An ICMI Study*. pp. 273-280. Dordrecht, NL: Kluwer.
- Fitri, N., Munzir, S., & Duskri, M. (2017). Meningkatkan kemampuan Representasi Matematis melalui Penerapan Model Problem Based Learning, *Jurnal Didaktik Matematika*, 4(1), 59-67.
- Halat, E., & Peker, M. (2011). The impacts of mathematical representations developed through WebQuest and spreadsheet activities on the motivation of pre-service elementary school teachers. *TOJET: The Turkish Online Journal of Educational Technology*, 10(2), 259-263.
- Hwang, W. Y., Chen, N. S., Dung, J. J., & Yang, Y. L. (2007). Multiple Representation Skills and Creativity Effects on Mathematical Problem Solving using a Multimedia Whiteboard System. *Journal of Educational Technology & Society*, 10(2), 191-212.
- Iswahyudi, G. (2012). Aktivitas Metakognisi dalam Memecahkan Masalah Pembuktian Langsung Ditinjau dari Gender dan Kemampuan Matematika. *Makalah Seminar Nasional Program Studi Pendidikan Matematika*. Surakarta: Universitas Negeri Surakarta.
- Jones, B. F. & Knuth, R.A. (1991). What does Research Say about Mathematics? [on-line]. Tersedia di http://www.ncrl.org/sdrs/areas/stw_esys/2math.html.
- Manu, S. S. (2005). Language switching and mathematical understanding in Tongan classrooms: An investigation. *Direction: Journal of Educational Studies*, 27(2), 47-70.
- Martin, L., LaCroix, L., & Fownes, L. (2005). Folding Back and the Growth of Mathematical Understanding in Workplace Training. *Adults Learning Mathematics*, 1(1), 19-35.
- Meel, D. E. (2003). Models and theories of mathematical understanding: Comparing Pirie and Kieren's model of the growth of mathematical understanding and APOS theory. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 12, 132-181.
- Moleong, J.L. (2010). *Metodologi Penelitian Kualitatif*. Bandung: PT Remaja Rosdakarya.
- Mousley, J. (2005). What does mathematics understanding look like?. In *Building connections: research, theory and practice: proceedings of the annual conference held at RMIT*. Melbourne, Merga.
- Parameswaran, R. (2010). Expert Mathematics' Approach to Understanding Definitions. *Mathematics Educator*, 20(1), 43-51.
- Pegg, J., & Tall, D. (2005). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. *ZDM*, 37(6), 468-475.
- Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How we can characterize it and how we can represent it. *Educational Studies in Mathematics*, 9, 160-190.
- Sagala, V. (2017). "Profil Lapisan Pemahaman Konsep Turunan Fungsi Mahasiswa Calon Guru Berdasarkan Gender". *Disertasi*. Pascasarjan UNESA Surabaya.
- Schultz, J., & Waters, M. (2000). Why Representations? Mathematics Teacher, *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 93(6), 448-453.
- Susiswo (2015). "Folding back Mahasiswa dalam Menyelesaikan Masalah Limit". *Disertasi*. Universitas Negeri Malang.
- Tall, D. (1992). *The transition from arithmetic to algebra: Number patterns, or proceptual programming*. Makalah di presentasikan pada Mathematics Teaching and Learning "From Numeracy to Algebra", September 2-3, Queensland University of Technology, Brisbane.