Journal of Data Analysis
Vol.2, No.1, June 2019, p. 17-21

Suatu Kajian Tentang Bilangan Sempurna

Saiful Amri[1], Mahmudi[2*]

[1,2] Department of Mathematics, Syiah Kuala University, Banda Aceh, Indonesia
E-mail: mahmudi@unsyiah.ac.id*

* = corresponding author

Abstrak

Dalam tulisan ini akan dijelaskan mengenai kriteria bilangan sempurna genap dan bentuk bilangan sempurna ganjil (jika ada). Jika $2^k - 1$ prima maka $2^{k-1}(2^k - 1)$ berupa bilangan sempurna. Sebaliknya, semua bilangan sempurna genap berbentuk $2^{k-1}(2^k - 1)$, dengan $2^k - 1$ prima. Dengan demikian, masalah menentukan bilangan sempurna genap setara dengan menentukan k sehingga $2^k - 1$ prima. Bilangan $2^k - 1$ disebut sebagai bilangan *Mersenne* dan ditulis dengan M_k.

Informasi Artikel

Sejarah Artikel:
Diajukan 3 Des 2018
Diterima 18 Agt 2019

Kata Kunci:
Bilangan Sempurna Genap
Bilangan Sempurna Ganjil
Prima
Bilangan Mersenne

Abstract

In this paper will be explained about the criteria of the even perfect numbers and the form of odd perfect numbers (if any). If $2^k - 1$ is prime, then $2^{k-1}(2^k - 1)$ is perfect. Conversely, all even perfect numbers are of the form $2^{k-1}(2^k - 1)$ with $2^k - 1$ is a prime. Thus, finding even perfect numbers is equivalent to find the integers k for which $2^k - 1$ is prime. The numbers of the form $2^k - 1$ called Mersenne numbers and is denoted by M_k.

Keyword:
Even Perfect Number
Odd Perfect Number
Prime
Mersenne Number

1. Pendahuluan

Bilangan prima adalah bilangan asli yang lebih besar dari satu dan hanya memiliki dua faktor positif berbeda, satu dan bilangan itu sendiri [1]. Banyak penelitian yang terkait tentang bilangan prima, seperti keterkaitan bilangan prima dengan bilangan Fibonacci [2]. Bilangan Fibonacci merupakan bilangan dengan suku ke-n merupakan jumlah suku $n - 1$ dan suku $n - 2,$ dengan suku pertama dan kedua berturut-turut didefinisikan sebagai 0 dan 1.

Selain bilangan Fibonacci, bilangan sempurna juga merupakan suatu kajian menarik terkait bilangan prima. Suatu bilangan disebut bilangan sempurna jika jumlah semua pembagi positif sejatinya adalah bilangan itu sendiri. Dua bilangan sempurna pertama adalah $6 = 1 + 2 + 3$ dan $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Penelitian tentang bentuk umum bilangan sempurna telah menarik perhatian banyak matematikawan sejak zaman Phytagoras hingga saat ini. Beberapa nama yang tercatat dalam penelitian bilangan sempurna pada periode klasik adalah Euclid dan Nichomachus. Sementara, pada periode modern muncul lebih banyak nama, seperti Marin Mersenne, Pierre de Fermat, Leonhard Euler, dan Edouard Lucas.

Artikel ini akan menyajikan sifat matematis bilangan sempurna, baik untuk bilangan sempurna genap maupun bentuk bilangan sempurna ganjil (jika ada).

2. Tinjauan Kepustakaan

Sifat matematis bilangan sempurna pertama kali dipelajari oleh Euclid (300 SM). Dalam *Elements* buku ke IX, pada Proposisi 36 Euclid menyatakan bahwa jika jumlah

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1 = M_k$$

adalah prima, maka $2^{(k-1)}M_k$ adalah bilangan sempurna. Dua puluh abad setelah itu, Euler membuktikan bahwa setiap bilangan sempurna genap harus berbentuk $2^{(k-1)}M_k$ dengan M_k prima [3].

Berhingga atau tidaknya bilangan sempurna genap dan keberadaan bilangan sempurna ganjil masih misteri. Banyak matematikawan menduga bahwa ada tak berhingga banyaknya bilangan sempurna genap namun belum ada yang bisa membuktikan atau membantahnya. Dipihak lain juga belum ada bukti atau bantahan mengenai keberadaan bilangan sempurna ganjil. Namun jika ada, maka bilangan tersebut memiliki bentuk khusus yang telah ditunjukkan oleh Euler, yaitu

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{2j_r}$$

dengan p_i prima berbeda dan $p_1 \equiv k_1 \equiv 1 (mod\ 4)$.

Pencarian bilangan sempurna genap setara dengan menentukan bilangan asli k sehingga M_k prima. Suatu proyek yang tersebar di internet untuk penemuan bilangan sempurna genap adalah GIMPS (*Great Internet Mersenne prime Search*). Proyek komputasi ini digagas oleh George Woltman di akhir tahun 1995 dan sebanyak 14 bilangan sempurna genap ditemukan melalui GIMPS ini dari tahun 1996 hingga 2013 [4]. Hingga saat ini hanya diketahui 48 buah bilangan sempurna dan semuanya genap [5].

Salah satu algoritma yang digunakan dalam aplikasi GIMPS untuk menentukan primalitas dari M_k adalah algoritma Lucas-Lehmer. Algoritma Lucas-Lehmer menggunakan barisan rekursif $s_1 = 4$, $s_i = s_{i-1}^2 - 1$ untuk $i \geq 2$. Untuk sebarang bilangan prima ganjil p, bilangan M_p prima jika dan hanya jika s_{p-1} kelipatan dari M_p. Namun pada artikel ini, akan dibangun algoritma lain yang berbeda dari algoritma Lucas-Lehmer. Satu sisi, algoritma ini sudah jauh tertinggal dibandingkan Algoritma Lucas-Lehmeir dalam menemukan M_k yang prima, namun efektif dalam mendapatkan M_k yang komposit. Selain itu, dengan menggunakan algoritma ini, dapat diketahui pembagi nontrivial dari M_k yang komposit.

3. Metodologi Penelitian

Kajian ini merupakan penelitian bidang matematika teoritis, terutama terkait dengan teori bilangan. Dengan demikian, akan memanfaatkan pengetahuan yang telah diketahui oleh penulis dengan ditunjang penelitian-penelitian sebelumnya yang terkait dengan bilangan sempurna serta hasil-hasil yang telah ada dalam literatur kajian bidang murni matematika.

4. Hasil dan Pembahasan

4.1. Kriteria Bilangan Sempurna Genap

Empat bilangan sempurna yang pertama memiliki bentuk khusus sebagai berikut.

$$\begin{aligned} 6 &= 2 \times 3 = 2^1(2^2 - 1) \\ 28 &= 4 \times 7 = 2^2(2^3 - 1) \\ 496 &= 16 \times 31 = 2^4(2^5 - 1) \\ 8128 &= 64 \times 127 = 2^6(2^7 - 1) \end{aligned}$$

Dapat diketahui bahwa keempat bilangan sempurna tersebut merupakan perkalian dari bilangan berbentuk 2^{k-1} dengan suatu bilangan prima berbentuk $2^k - 1$. Hal ini memberikan suatu dugaan bahwa jika $2^k - 1$ merupakan bilangan prima maka $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ adalah bilangan sempurna. Jelas, bahwa n adalah bilangan genap. Ternyata hal ini juga berlaku sebaliknya, yaitu semua bilangan sempurna genap berbentuk $2^{k-1}(2^k - 1)$, dengan $2^k - 1$ prima. Hal tersebut dinyatakan dalam Dalil 1 berikut ini.

Dalil 1.

Bilangan asli n adalah bilangan sempurna genap jika dan hanya jika $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$, dengan $2^k - 1$ prima.

Bukti. Akan dibuktikan ke arah kiri terlebih dahulu. Tulis $n = 2^{k-1}p$, dengan $p = 2^k - 1$ prima. Berdasarkan sifat jumlah pembagi positif bilangan sempurna, cukup ditunjukkan bahwa $\sigma(n) = 2n$. Karena $\gcd(2^{k-1}, p) = 1$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= \sigma(2^{k-1})\sigma(p)\\ &= (1 + 2 + \cdots + 2^{k-1})(1 + p)\\ &= (2^k - 1)(1 + p)\\ &= (2^k - 1)2^k = 2n\end{aligned}$$

Arah sebaliknya, misalkan n adalah sebarang bilangan sempurna genap. Dapat ditulis $n = 2^{k-1}s$ untuk suatu $k > 1$ dan suatu bilangan ganjil $s > 0$. Akan dibuktikan bahwa s prima dan berbentuk $2^k - 1$. Karena $\gcd(2^{k-1}, s) = 1$ maka

$$2^k s = 2n = \sigma(n) = \sigma(2^{k-1})\sigma(s) = (2^k - 1)\sigma(s)$$

yang mengatakan bahwa $2^k - 1$ membagi habis $2^k s$ dan karena $\gcd(2^k - 1, 2^k) = 1$ berakibat $2^k - 1$ membagi habis s, artinya $s = (2^k - 1)S$ untuk suatu $S \in \mathbb{Z}$. Diperoleh

$$2^k(2^k - 1)S = 2^k s = (2^k - 1)\sigma(s)$$

berakibat $\sigma(s) = 2^k S$.
Dengan demikian, minimal terdapat 2 pembagi positif dari s, yaitu s dan S, dengan $S < s$. Karena

$$s + S = \left(1 + \frac{s}{S}\right)S = (1 + 2^k - 1)S = 2^k S$$

maka

$$2^k S = \sigma(s) \geq s + S = 2^k S$$

yang mengharuskan $\sigma(s) = s + S$. Artinya, hanya ada dua pembagi positif dari s, yaitu s dan S, yang berakibat $S = 1$. Jadi, s prima dan $s = 2^k - 1$.

Ternyata untuk memperoleh satu bilangan sempurna genap, cukup dipilih k sehingga $2^k - 1$ prima. Berdasarkan 4 bilangan sempurna yang pertama, dapat diduga bahwa jika $2^k - 1$ prima maka k juga prima. Hal tersebut sebagaimana dinyatakan dalam Dalil 2 berikut.

Dalil 2.
Jika $2^k - 1$ *adalah bilangan prima maka* k *juga merupakan bilangan prima.*

Bukti. Jika k komposit maka $k = rs$ untuk suatu $r, s \in \mathbb{Z}$ dengan $1 < r < k$. Karena

$$2^k - 1 = (2^r)^s - 1 = (2^r - 1)((2^r)^{s-1} + (2^r)^{s-2} + \cdots + 1)$$

dengan $1 < 2^r - 1 < 2^k - 1$ maka $2^k - 1$ juga komposit. ■

Konvers Dalil 2 tidak berlaku, artinya untuk sebarang k prima tidak berakibat $2^k - 1$ merupakan bilangan prima. Sebagai contoh, untuk nilai $k = 11$ dan $k = 23$, maka

$$2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$$

dan

$$2^{23} - 1 = 8388607 = 47 \times 178481$$

yang masing-masing merupakan bilangan komposit.

Dapat juga diamati bahwa keempat bilangan sempurna yang pertama diakhiri oleh digit 6 dan 8 secara bergantian. Tetapi dua bilangan sempurna berikutnya (yaitu 33550336 dan 8589869056) menunjukkan bahwa digit akhir 6 dan 8 belum tentu bergantian. Dalil 3 berikut menyatakan karakteristik digit akhir suatu bilangan sempurna.

Dalil 3.
Suatu bilangan sempurna genap n *berakhir dengan digit* 6 *atau* 8.

Bukti. Misal $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ bilangan sempurna genap, dengan $2^k - 1$ prima. Berdasarkan Dalil 2, k juga prima. Untuk $k = 2$, maka $n = 2 \times 3 = 6 \equiv 6(mod\ 10)$, sesuai dengan pernyataan. Bila $k > 2$ maka $k = 4q + 1$ atau $k = 4q + 3$. Jika $k = 4q + 1$ maka

$$n = 2^{4q}(2^{4q+1} - 1) = 2^{8q+1} - 2^{4q} = 2 \times 16^{2q} - 16^q \equiv 2 \times 6 - 6 \equiv 6(mod\ 10).$$

Sementara, jika $k = 4q + 3$ maka

$$\begin{aligned} n &= 2^{4q+2}(2^{4q+3} - 1) \\ &= 2^{8q+5} - 2^{4q+2} = 32 \times 16^{2q} - 4 \times 16^q \\ &\equiv 32 \times 6 - 4 \times 6 = 28 \times 6 \\ &\equiv -2 \equiv 8\ (mod\ 10). \end{aligned}$$

Jadi, bilangan sempurna genap memiliki digit terakhir angka 6 atau angka 8.

Selanjutnya, akan dibahas mengenai bilangan sempurna ganjil.

4.2. Bilangan Sempurna Ganjil

Ada atau tidaknya bilangan sempurna ganjil masih menjadi masalah besar dalam Teori Bilangan. Walaupun belum ada bilangan sempurna ganjil yang ditemukan, namun bentuknya dapat ditentukan. Jika n adalah bilangan sempurna ganjil, maka

$$n = p_1^{k_1} p_2^{2j_2} \cdots p_r^{2j_r}$$

dengan p_i adalah bilangan prima berbeda dan $p_1 \equiv k_1 \equiv 1(mod\ 4)$.
Dalil 4 berikut adalah bukti untuk penjelasan tersebut.

(Dalil Euler)
Jika n adalah bilangan sempurna ganjil, maka

$$n = p_1^{k_1} p_2^{2j_2} \cdots p_r^{2j_r}$$

dengan p_i adalah bilangan prima berbeda dan $p_1 \equiv k_1 \equiv 1(mod\ 4)$.

Bukti. Ambil sebarang bilangan sempurna ganjil n. Misal faktorisasi prima dari n adalah

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}.$$

Berdasarkan Dalil 1, karena n bilangan sempurna maka $\sigma(n) = 2n$, diperoleh

$$2n = \sigma(n) = \sigma(p_1^{k_1})\sigma(p_2^{k_2}) \cdots \sigma(p_r^{k_r}).$$

Karena n merupakan bilangan ganjil maka $n \equiv 1(mod\ 4)$ atau $n \equiv 3(mod\ 4)$, yang berakibat $2n \equiv 2(mod\ 4)$. Artinya, $\sigma(n) = 2n$ merupakan bilangan kelipatan 2 tetapi bukan kelipatan 4. Akibatnya harus ada satu dari $\sigma(p_i^{k_i})$, sebutlah $\sigma(p_1^{k_1})$, yang merupakan kelipatan 2 namun bukan kelipatan 4, dan $\sigma(p_i^{k_i})$ ganjil untuk setiap $i \neq 1$.

Dengan demikian, dapat dibagi dua kasus, yaitu kasus $p_i \equiv 1(mod\ 4)$ dan $p_i \equiv 3(mod\ 4)$. Jika $p_i \equiv 3(mod\ 4)$, diperoleh

$$\begin{aligned} \sigma(p_i^{k_i}) &= 1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_i^{k_i} \\ &\equiv 1 + (-1) + (-1)^2 + \cdots + (-1)^{k_i}\ (mod\ 4) \end{aligned}$$

yang berakibat

$$\sigma(p_i^{k_i}) \equiv \begin{cases} 0\ (mod\ 4), & \text{jika } k_i \text{ ganjil} \\ 1\ (mod\ 4), & \text{jika } k_i \text{ genap} \end{cases}$$

Kondisi $\sigma(p_i^{k_i}) \equiv 0(mod\ 4)$ tidak mungkin terjadi, karena akan berakibat $4|\ \sigma(n)$. Dengan demikian, akan diperoleh pernyataan sebagai berikut.

"Jika $p_i \equiv 3(mod\ 4)$ maka k_i genap"

Untuk kasus $p_i \equiv 1(mod\ 4)$ maka

$$\begin{aligned} \sigma(p_i^{k_i}) &= 1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_i^{k_i} \\ &\equiv 1 + 1 + 1^2 + \cdots + 1^{k_i}\ (mod\ 4) \\ &\equiv 1 + k_i(mod\ 4). \end{aligned}$$

Telah diketahui bahwa $\sigma\left(p_1^{k_1}\right) \equiv 2(mod\, 4)$ yang berakibat $k_1 \equiv 1(mod\, 4)$ dan $p_i \equiv 1(mod\, 4)$. Jika $i \neq 1$ maka $\sigma\left(p_i^{k_i}\right) \equiv 1$ atau $3(mod\, 4)$, yang tentunya berakibat $k_i \equiv 0(mod\, 4)$ atau $k_i \equiv 2(mod\, 4)$. Dengan demikian, akan diperoleh pernyataan

"Jika $p_i \equiv 3(mod\, 4)$ maka k_i genap".

Artinya, baik untuk kasus $p_i \equiv 1(mod\, 4)$ maupun $p_i \equiv 3(mod\, 4)$ akan diperoleh nilai k_i genap jika $i \neq 1$. Jadi, jika n bilangan sempurna ganjil maka $n = p_1^{k_1} p_2^{2j_2} \cdots p_r^{2j_r}$.

Akibat 4. Jika n bilangan sempurna ganjil maka n berbentuk

$$n = p^k m^2,$$

dengan p prima, $p \nmid m$, dan $p \equiv k \equiv 1(mod\, 4)$. Secara lebih khusus, $n \equiv 1(mod\, 4)$.

Bukti. Berdasarkan Dalil Euler, diperoleh

$$n = p^k \left(p_1^{j_1} \cdots p_r^{j_r}\right)^2 = p^k m^2$$

dengan setiap p_j dan p prima ganjil dengan $p \equiv k \equiv 1(mod\, 4)$ dan p bukan pembagi dari $m = p_1^{j_1} \cdots p_r^{j_r}$. Karena m ganjil maka $m^2 \equiv 1(mod\, 4)$, dan karena $p \equiv 1(mod\, 4)$ maka $p^k \equiv 1(mod\, 4)$. Dengan demikian, diperoleh $n = p^k m^2 \equiv 1(mod\, 4)$.

5. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat disimpulkan

1. Bilangan asli n merupakan bilangan sempurna genap jika dan hanya jika $n = 2^{k-1}\left(2^k - 1\right)$ dengan $2^k - 1$ bilangan prima.
2. Digit terakhir suatu bilangan sempurna genap adalah angka 6 atau angka 8.
3. Jika bilangan asli n merupakan bilangan sempurna ganjil maka $n = p_1^{k_1} p_2^{2j_2} \cdots p_r^{2j_r}$ dengan p_i adalah bilangan prima berbeda dan $p_1 \equiv k_1 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$.

Daftar Pustaka

[1] Starbird, Miranda L. 2008. *The Mathematics Behind Prime Numbers*. Department of Mathematics and Computer Science – Ripon College.
[2] Schneider, Christina L. 2008. *Discovering Connections: The Prime Numbers and the Fibonacci Numbers*. Department of Mathematics and Computer Science – Ripon College.
[3] Burton, David M. 2007. *Elementary Number Theory*, 6^{th} ed. McGraw-Hill, New York.
[4] Caldwell, Chris K. *Mersenne Primes: History, Theorems and Lists*. http://primes.utm.edu/mersenne. Tanggal akses 29 September 2018.
[5] Great Internet Mersenne Prime Search, GIMPS. 2013. *Largest Known Prime, 50th Known Mersenne Prime Found!!*. http://mersenne.org. Tanggal akses 29 September 2018.