Journal of Data Analysis
Vol.1, No.2, Dec 2018, p. 77-82

A Note on a Normal Subgroup and an Ideal

Mahmudi

Department of Mathematics, Syiah Kuala University, Banda Aceh, Indonesia
E-mail: mahmudi@unsyiah.ac.id

Abstrak

Grup Bagian Normal (subgrup normal) memainkan peran penting dalam aljabar grup. Grup bagian H di G didefinisikan normal jika dan hanya jika koset kiri H di G sama dengan koset kanan H di G. Penelitian ini merupakan kajian literatur dan membahas detail alasan penamaan subgrup normal, terutama terkait dengan pembentukan grup faktor. Lebih lanjut, dibahas juga dasar pendefinisian ideal pada pembentukan ring (gelanggang) faktor.

Informasi Artikel

Sejarah Artikel:
Diajukan 11 Des 2018
Diterima 19 Des 2018

Kata Kunci:
Grup bagian normal
Grup bagian
Koset kiri
Koset kanan
Grup faktor
Ideal
Gelanggang faktor

Abstract

Normal subgroup plays an important role in group algebra. A subgroup H of a group G is called a normal subgroup of G if $xH = Hx$ for all $x \in G$. This research is literature review and discuss the reason for subgroup to be defined a normal. Furthermore, we also discuss the definition of an ideal that used to form a ring factor.

Keyword:
Normal subgroup
Subgroup
Left coset
Right coset
Group factor
Ideal
Ring factor

1. Pendahuluan

Struktur himpunan semua bilangan bulat, yang dinotasikan $\mathbb{Z}$, merupakan miniatur dalam pengembangan struktur grup dan struktur gelanggang. Salah satu contohnya adalah terbentuknya himpunan $\mathbb{Z}_n$, yaitu himpunan semua kelas ekivalen modulo n, melalui relasi ekivalen. Konsep ini dikembangkan dalam teori grup dan teori gelanggang untuk membentuk grup faktor dan gelanggang faktor dari struktur yang sudah ada [1].

Secara umum, pembelajaran teori grup dan teori gelanggang memiliki kemiripan. Diawali dengan pengertian grup dan gelanggang serta contoh-contohnya. Selanjutnya, diperkenalkan himpunan bagian dari grup atau gelanggang yang memiliki struktur grup (gelanggang) terhadap operasi yang sama. Pada teori grup dinamakan grup bagian (*subgroup*), sementara pada teori gelanggang dinamakan dengan gelanggang bagian (*ring factor*). Diikuti dengan pembahasan homomorfisma, yaitu hubungan antar grup atau gelanggang, berurutan dinamakan dengan homomorfisma grup dan homomorfisma gelanggang [2].

Lebih lanjut, berdasarkan grup maupun gelanggang yang sudah ada dibentuk grup ataupun gelanggang yang baru. Struktur yang baru ini dinamakan grup faktor pada teori grup dan gelanggang faktor pada teori gelanggang [3].

Salah satu hal yang menarik dalam pembentukan grup faktor adalah diperkenalkan subgrup yang bersifat normal dan juga diperkenalkan konsep ideal dalam pembentukan gelanggang faktor. Beberapa referensi langsung menuliskan definisi subgrup normal pada pembahasan grup faktor dan definisi ideal pada pembahasan gelanggang faktor.

Penulisan definisi tanpa alasan yang memadai membuat penulis tertarik untuk menyelidiki ide dasar definisi subgrup normal dan ideal. Dengan harapan, hasil telaahan tersebut dapat memberikan gambaran bahwa definisi maupun teorema yang dipelajari dalam aljabar abstrak bukan merupakan sesuatu yang muncul begitu saja. Tulisan ini mengkaji alasan pendefinisian grup bagian normal dan ideal dalam pembentukan grup faktor dan gelanggang faktor.

2. Tinjauan Kepustakaan

2.1. Operasi Biner

Operasi biner pada suatu himpunan tak kosong A adalah pemetaan f dari $A \times A$ ke A [3]. Dengan demikian, untuk sebarang $(x, y) \in A \times A$ maka $f\big((x,y)\big) \in A$ dan tunggal. Operasi biner menjamin sifat tertutup dan *well defined*. Notasi $f\big((x,y)\big)$ bukan merupakan notasi yang umum dikenal, notasi $*$ lebih sering digunakan dibandingkan notasi f. Artinya, $x * y$ menunjukkan sebarang operasi biner pada himpunan A. Notasi $\langle A, *\rangle$ dapat dibaca sebagai himpunan A yang dilengkapi operasi biner $*$ [4].

Pembaca diasumsikan sudah memahami sifat-sifat operasi biner seperti komutatif, assosiatif, elemen identitas, dan elemen balikan. Himpunan yang dilengkapi dengan satu operasi biner maupun dua operasi biner serta memenuhi sifat-sifat tertentu memiliki nama tersendiri.

2.2. Grup, Grup Bagian, dan Homomorfisma Grup

Misalkan G himpunan tak kosong yang dilengkapi operasi biner $*$, dinotasikan $\langle G, *\rangle$. Himpunan G dinamakan grup terhadap operasi $*$ jika memenuhi tertutup, assosiatif, elemen identitas, dan elemen balikan.. Lebih jauh, jika operasi $*$ bersifat komutatif maka $\langle G,*\rangle$ dinamakan grup komutatif [5].

Sebagai contoh, dapat mudah dibuktikan bahwa $\langle \mathbb{Z}, +\rangle$ merupakan grup [6], tetapi $\langle \mathbb{Z}, \times\rangle$ bukan merupakan grup. Contoh tersebut dapat dikembangkan atas himpunan yang lebih besar, seperti himpunan semua bilangan rasional, $\mathbb{Q}$ dan himpunan semua bilangan real, $\mathbb{R}$. Dua himpunan tersebut merupakan grup terhadap operasi penjumlahan.

Salah contoh lain yang sangat menarik adalah himpunan semua kelas ekivalen modulo n, yaitu $\mathbb{Z}_n$. Himpunan tersebut merupakan grup terhadap operasi penjumlahan modulo n. Contoh ini menarik dikarenakan ide pembentukan himpunan $\mathbb{Z}_n$ dari himpunan $\mathbb{Z}$ diperumum untuk membentuk grup baru dari grup yang sudah ada.

Sudah diketahui bahwa $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Q}$ merupakan himpunan bagian dari $\mathbb{R}$. Hal ini mendasari munculnya definisi grup bagian. Himpunan bagian tak kosong H dari grup G didefinisikan sebagai grup bagian dari G jika H juga merupakan grup terhadap operasi yang sama dengan G [6]. Selain itu, pembuktian suatu himpunan bagian merupakan grup bagian dapat juga menggunakan teorema. Misalkan $\langle G,*\rangle$ adalah grup dan H himpunan bagian tak kosong dari G, maka $\langle H,*\rangle$ dinamakan grup bagian dari $\langle G,*\rangle$ jika memenuhi kondisi

(i) $a * b \in H$
(ii) $a^{-1} \in H$

untuk setiap $a, b \in H$ [4].
Dapat dengan mudah dibuktikan bahwa $3\mathbb{Z}$ merupakan grup bagian dari $\mathbb{Z}$. Secara umum, $n\mathbb{Z}$ merupakan grup bagian dari $\mathbb{Z}$.

Hubungan antar grup dinamakan dengan homomorfisma. Pemetaan f dari $\langle G_1,*\rangle$ ke $\langle G_2,\circledast\rangle$ didefinisikan sebagai homomorfisma grup jika memenuhi

$$f(a * b) = f(a) \circledast f(b)$$

untuk semua $a, b \in G_1$ [1].

Pemahaman mengenai gelanggang memiliki kemiripan dengan konsep grup. Jika struktur grup dilengkapi satu operasi biner, maka gelanggang merupakan struktur yang dilengkapi dengan dua operasi biner.

2.3. Gelanggang, Gelanggang Bagian, dan Homomofirsma Gelanggang

Berdasarkan pemahaman mengenai grup, gelanggang R dapat didefinisikan sebagai himpunan tak kosong yang dilengkapi dua operasi biner, dinotasikan $\langle R, \oplus, \otimes \rangle$, dan memenuhi

I. $\langle R, \oplus \rangle$ merupakan grup komutatif,
II. $\langle R, \otimes \rangle$ bersifat assosiatif, dan
III. $\langle R, \oplus, \otimes \rangle$ bersifat distributif.

Operasi biner $\oplus$ dan $\otimes$ berturut-turut dinamakan operasi penjumlahan dan perklian [2].

Sebagai contoh, $\langle \mathbb{Z}, +, \times \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, +, \times \rangle$, dan $\langle \mathbb{R}, +, \times \rangle$ merupakan gelanggang. Himpunan $\mathbb{Z}_n$ juga membentuk grup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian modulo n.

Gelanggang bagian didefinisikan sebagai berikut. Misalkan R_1 adalah gelanggang dan R_2 himpunan bagian tak kosong dari R_1. Himpunan R_2 merupakan gelanggang bagian dari R_1 jika R_2 merupakan gelanggang terhadap operasi yang sama dengan R_1 [3]. Gelanggang bagian juga dapat dilakukan uji sebagaimana grup bagian, yaitu untuk menentukan suatu himpunan bagian merupakan gelanggang bagian atau bukan.

Himpunan bagian tak kosong R_2 merupakan gelanggang bagian dari R_1 jika dan hanya jika R_2 tertutup terhadap pengurangan dan perkalian, yaitu $a - b \in R_2$ dan $ab \in R_2$ untuk setiap $a, b \in R_2$[2]. Elemen $-b$ merupakan balikan dari elemen b terhadap operasi penjumlahan.

Untuk memudahkan operasi penjumlahan dan perkalian pada gelanggang dinotasikan $+$ dan $\times$ dengan asumsi operasi penjumlahan dan perkalian yang menyesuaikan struktur himpunan yang diberikan. Pada umumnya, notasi perkalian tidak dituliskan, artinya $a \times b$ cukup dituliskan ab.

Dengan cara serupa, pemetaan f dari gelanggang R_1 ke gelanggang R_2 dinamakan homomorfisma gelanggang jika f mempertahankan operasi biner, yaitu

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$

dan

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

untuk setiap $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{R}_1$ [1].

2.4. Relasi Ekivalen pada Grup

Subbab ini merupakan awal pembahasan utama pembahasan dalam tulisan ini. Sebagaimana telah ditulis pada Bagian Pendahuluan, bahwa melalui relasi ekivalen pada himpunan $\mathbb{Z}$ dapat dibentuk himpunan $\mathbb{Z}_n$. Telah diketahui juga, bahwa kedua himpunan tersebut mempunyai struktur grup dan gelanggang.

Misalkan n bilangan bulat positif dan $a, b \in \mathbb{Z}$, maka dapat dibuktikan bahwa relasi

$$a \equiv b \text{ jika dan hanya jika } a - b = nk$$

untuk suatu bilangan bulat k merupakan relasi ekivalen pada $\mathbb{Z}$ [2]. Dengan demikian, dapat dibentuk kelas-kelas ekivalen

$$[a] = \{x \in \mathbb{Z} | x \equiv a\}.$$

Himpunan semua kelas ekivalen tersebut dinamakan $\mathbb{Z}_n$.

Berdasarkan ide tersebut, maka didefinisikan suatu relasi ekivalen atas grup G. Dengan memilih b^{-1} sebagai $-b$ dan grup bagian H sebagai nk, yaitu kelipatan n. Misalkan G adalah grup dan H grup bagian dari G. Definisikan relasi $\sim_l$ sebagai

$$x \sim_l y \text{ jika dan hanya jika } x^{-1}y \in H$$

dan relasi $\sim_r$ sebagai

$$x \sim_r y \text{ jika dan hanya jika } xy^{-1} \in H$$

untuk setiap $x, y \in H$.

Dapat dibuktikan bahwa kedua relasi tersebut merupakan relasi ekivalen [1]. Dengan menghitung salah satu kelas ekivalen berdasarkan relasi tersebut, akan diperoleh

$$\begin{aligned} [x] &= \{y \in G | y \sim_l x\} = \{y \in G | y^{-1}x \in H\} \\ &= \{y \in G | y^{-1}x = p, \text{ untuk suatu } p \in H\} \\ &= \{y \in G | x^{-1}y = p^{-1}, \text{ untuk suatu } p \in H\} \end{aligned}$$

$$= \{y \in G | y = xp^{-1}, \text{ untuk suatu } p \in H\} = \{xp^{-1} | \text{ untuk suatu } p \in H\}$$
$$= xH$$

Bentuk kelas ekivalen tersebut memiliki nama khusus, yaitu koset kiri dari H di G. Dengan cara serupa, relasi ekivalen $\sim_r$ akan menghasilkan bentuk koset kanan dari H di G.

$$\begin{aligned}
[x] &= \{y \in G | y \sim_r x\} = \{y \in G | yx^{-1} \in H\} \\
&= \{y \in G | yx^{-1} = p, \text{ untuk suatu } p \in H\} \\
&= \{y \in G | y = px, \text{ untuk suatu } p \in H\} \\
&= \{px | \text{ untuk suatu } p \in H\} \\
&= Hx
\end{aligned}$$

Dengan demikian, akan diperoleh dua koleksi koset. Koleksi koset kiri dari H di G, dinotasikan $\Omega_l = \{xH | x \in G\}$ dan koleksi kanan dari H di G, dinotasikan $\Omega_r = \{Hx | x \in G\}$.

Berdasarkan pengetahuan bahwa $\mathbb{Z}_n$ juga merupakan grup, maka sesuatu yang alamiah untuk mempertanyakan, apakah Ω_l dan Ω_r juga memiliki struktur grup? Dapat diperiksa di semua rujukan bahwa syarat perlu dan syarat cukup Ω_l dan Ω_r untuk membentuk grup adalah subgrup H harus normal di G [1, 2, 3, 4, 5, 6].

3. Metodologi Penelitian

Kajian ini merupakan penelitian bidang matematika teoritis, terutama terkait dengan aljabar abstrak. Dengan demikian, tulisan ini akan memanfaatkan pengetahuan yang telah penulis ketahui tentang konsep grup bagian normal dan grup faktor. Informasi yang terkait dengan gelanggang bagian dan ideal juga sangat menunjang dalam penelitian ini. Pengetahuan dasar tentang kajian ini dapat ditemukan dalam berbagai rujukan buku-buku teks aljabar dan tidak ada yang murni baru dalam hasil yang diperoleh.

Penulis hanya mencoba mencari dasar pendefinisian istilah tertentu, dalam hal ini grup bagian normal dan ideal, yang barangkali belum terjelaskan dengan baik dalam berbagai literatur.

4. Hasil dan Pembahasan

4.1. Subgrup Normal

Misalkan H subgrup dari grup G. Bentuk himpunan semua koset kiri dari H di G sebagai
$$\Omega_l = \{xH | x \in G\},$$
dan himpunan semua koset kanan dari H di G sebagai
$$\Omega_r = \{Hx | x \in G\}.$$
Supaya Ω_l dan Ω_r memiliki struktur grup maka diperlukan suatu operasi biner pada himpunan tersebut. Dengan demikian, operasi paling alami yang dapat dilakukan pada Ω_l adalah $(xH)(yH) = (xy)H$ untuk setiap $xH, yH \in \Omega_l$. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa operasi terdefinisi dengan baik, yaitu jika $x_1H = x_2H$ dan $y_1H = y_2H$ maka
$$(x_1y_1)H = (x_1H)(y_1H) = (x_2H)(y_2H) = (x_2y_2)H.$$
Artinya, harus dibuktikan $(x_1y_1)H = (x_2y_2)H$.
Dapat dibuktikan bahwa $(x_1y_1)H = (x_2y_2)H$ berakibat $(x_1y_1)h_1 = (x_2y_2)h_2$ untuk suatu $h_1h_2 \in H$. Diperoleh $(x_1y_1)^{-1}(x_2y_2) = h_1h_2^{-1}$, artinya
$$(x_1y_1)^{-1}(x_2y_2) = (y_1^{-1}x_1^{-1})(x_2y_2) \in H.$$
Sementara diketahui bahwa $x_1H = x_2H$ dan $y_1H = y_2H$, dengan cara yang sama akan diperoleh $x_1^{-1}x_2 \in H$ dan $y_1^{-1}y_2 \in H$. Dengan demikian, persoalan operasi di Ω_l akan terdefinisi dengan baik merupakan persoalan menunjukkan kebenaran pernyataan
$$\text{Jika } x_1^{-1}x_2 \in H \text{ dan } y_1^{-1}y_2 \in H \text{ maka } (y_1^{-1}x_1^{-1})(x_2y_2) \in H.$$
Karena H merupakan grup bagian maka terdapat delapan kemungkinan untuk $x_1^{-1}x_2 \in H$ dan $y_1^{-1}y_2 \in H$, yaitu

a. $(x_1^{-1}x_2)(y_1^{-1}y_2)$
b. $(x_1^{-1}x_2)^{-1}(y_1^{-1}y_2)$
c. $(x_1^{-1}x_2)(y_1^{-1}y_2)^{-1}$
d. $(x_1^{-1}x_2)^{-1}(y_1^{-1}y_2)^{-1}$

e. $(y_1^{-1}y_2)(x_1^{-1}x_2)$
f. $(y_1^{-1}y_2)(x_1^{-1}x_2)^{-1}$
g. $(y_1^{-1}y_2)^{-1}(x_1^{-1}x_2)$
h. $(y_1^{-1}y_2)^{-1}(x_1^{-1}x_2)^{-1}$

Dapat diperhatikan, tidak satupun dari 8 kemungkinan tersebut yang akan menghasilkan $(y_1^{-1}x_1^{-1})(x_2y_2) \in H$. Artinya, harus dicari cara lain sedemikian sehingga $(y_1^{-1}x_1^{-1})(x_2y_2) \in H$.

Untuk membuktikan $(y_1^{-1}x_1^{-1})(x_2y_2) \in H$ maka harus dibuktikan $(y_1^{-1}x_1^{-1})(x_2y_2) = h_3$ untuk suatu $h_3 \in H$. Dengan kata lain, $x_2y_2 = x_1y_1h_3$.

Telah diketahui bahwa $x_1^{-1}x_2 \in H$ dan $y_1^{-1}y_2 \in H$, artinya $x_1^{-1}x_2 = h_1$ dan $y_1^{-1}y_2 = h_2$ untuk suatu $h_1, h_2 \in H$. Dengan demikian, $x_2 = x_1h_1$ dan $y_2 = y_1h_2$. Diperoleh $x_2y_2 = x_1h_1y_1h_2$. Artinya, haruslah $h_1y_1h_2 = y_1h_3$.

Jika G grup komutatif, tentunya hal ini dapat langsung dibuktikan dengan memilih $h_1h_2 = h_3$. Tetapi, G sebagai grup komutatif masih terlalu luas. Dengan demikian, agar terpenuhi

$$h_1y_1h_2 = y_1h_3$$

dapat dilakukan dengan memilih $h_1y_1 \in y_1H$. Dan karena $h_1y_1 \in Hy_1$, maka dapat dipilih kondisi H sebagai

$$\forall x \in G, \text{ berlaku } xH = Hx$$

Berdasarkan bentuk terakhir inilah didefinisikan grup bagian normal di G sebagai koset kiri dari H di G sama dengan koset kanan dari H di G. Salah satu sifat lain yang dapat diketahui adalah bahwa setiap grup bagian dari grup komutatif merupakan grup bagian normal

4.2. Ideal

Berdasarkan pembahasan Subbab 4.1, misalkan H gelanggang bagian dari gelanggang R. Telah dibentuk $\Omega_l = \{xH | x \in R\}$ dan $\Omega_r = \{Hx | x \in R\}$. Pembahasan ini, akan difokuskan pada himpunan Ω_r. Untuk membuktikan Ω_r sebagai gelanggang, maka harus dibuktikan operasi

$$Hx + Hy = H(x+y) \text{ dan } (Hx)(Hy) = H(xy)$$

merupakan operasi biner, lebih khususnya terdefinisi dengan baik. Karena H merupakan grup bagian normal dari R maka jelas $Hx + Hy = H(x+y)$ terdefinisi dengan baik, sebagaimana pembahasan subbab 4.1.

Artinya, hanya perlu dibuktikan untuk operasi perkalian. Yaitu, jika $Hx_1 = Hx_2$ dan $Hy_1 = Hy_2$ maka berlaku

$$H(x_1y_1) = (Hx_1)(Hy_1) = (Hx_2)(Hy_2) = H(x_2y_2).$$

Dengan demikian, untuk membuktikan operasi perkalian terdefinisi dengan baik, cukup dengan membuktikan pernyataan

"jika $x_1 - x_2 \in H$ dan $y_1 - y_2 \in H$ maka $x_1y_1 - x_2y_2 \in H$".

Dapat diketahui, dengan mengoperasikan semua bentuk kombinasi $x_1 - x_2$ dengan $y_1 - y_2$ tidak dapat menghasilkan bentuk $x_1y_1 - x_2y_2$. Artinya, harus dicari cara lain agar pernyataan tersebut bernilai benar.

Berdasarkan $x_1 - x_2 \in H$ dan $y_1 - y_2 \in H$ diperoleh $x_1 - x_2 = h_1$ dan $y_1 - y_2 = h_2$ untuk suatu $h_1, h_2 \in H$. Dengan demikian, $x_1 = h_1 + x_2$ dan $y_1 = h_2 + y_2$ dan dapat dihitung bahwa

$$x_1y_1 = (h_1 + x_2)(h_2 + y_2) = h_1h_2 + h_1y_2 + x_2h_2 + x_2y_2.$$

Artinya

$$x_1y_1 - x_2y_2 = h_1h_2 + h_1y_2 + x_2h_2.$$

Supaya $x_1y_1 - x_2y_2 \in H$ maka $x_1y_1 - x_2y_2 = h_3$ untuk suatu $h_3 \in H$. Dengan demikian, haruslah $h_1y_2 \in H$ dan $x_2h_2 \in H$.

Berdasarkan bentuk terakhir ini, kemudian muncul definisi ideal H pada gelanggang R.

5. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat disimpulkan

1. Definisi grup bagian normal muncul untuk menjamin operasi di koset kiri (kanan) terdefinisi dengan baik.
2. Definisi ideal muncul untuk menjamin operasi biner terhadap perkalian pada koset di gelanggang terdefinisi dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Fraleigh, J.B. 2002. *A First Course in Abstract Algebra*, 7th. Pearson Education, London.
[2] Galian, J.A. 2017. *Contemporary Abstract Algebra*, 9th ed. Cengage Learning, Boston, USA.
[3] Gilbert, L. dan Gilbert, J. 2015. *Elements of Modern Algebra*, 8th. Cengage Learning, Stamford, USA.
[4] Gilbert, W.J. dan Nicholson, W. K. 2004. *Modern Algebra With Aplication, 2nd*. John Wiley & Son, Inc, New Jersey.
[5] Hungerford, T. W. 2014. *Abstract Algebra: An Introduction,* 3th. Cengage Learning, Boston, USA.
[6] Judson, T.W. 2009. *Abstract Algebra: Theory and Applications*. Abstract.ups.edu.