

Model dan Kendali Modular pada Pendulum Terbalik tipe Rotary

Erwin Susanto

Fakultas Teknik Elektro, Universitas Telkom
Jl. Telekomunikasi, Terusan Buah Batu, Bandung 40257
e-mail: erwinelektro@telkomuniversity.ac.id

Abstrak—Pendulum terbalik tipe *rotary* (*Rotary Inverted Pendulum*, RIP) merupakan sistem fisik yang seringkali dijadikan sebagai platform teori dan aplikasi kendali pada sistem yang tak linier, tidak stabil, dan *underactuated* sehingga memberikan tantangan untuk mendesain kendali dan merealisasikannya. Konstruksi mekanik sistem terdiri dari lengan pendulum yang berputar horizontal pada porosudukan RIP dan lengan pendulum vertikal yang bergerak mengayun dari posisi bawah ke posisi setimbang tegak keatas. Makalah ini menyajikan skema model dan kendali pada RIP secara modular, dimana tiga bagian kendali disusun dan direalisasikan menggunakan *Multibody Matlab*. Tiga bagian kendali meliputi: kendali mengayun (*swing-up*) menggunakan kendali proporsional derivatif umpan balik positif, kendali mode pensaklaran yang bekerja mengubah kendali *swing-up* menjadi kendali stabilisasi saat lengan pendulum vertikal mencapai posisi di sekitar setimbang, dan kendali stabilisasi untuk mempertahankan kesetimbangan lengan vertikal menggunakan kendali proporsional derivatif. Trayektori pergerakan lengan pendulum dan visualisasi pergerakan tiga dimensi sistem pendulum yang disajikan menggunakan *Multibody Matlab* menunjukkan keberhasilan metode yang digunakan.

Kata kunci: *pendulum terbalik tipe rotary, kendali ayunan, proporsional derivatif, kendali stabilisasi*

Abstract—*Rotary Inverted Pendulum* (RIP) is a physical system that is often used as a theoretical platform and application of non-linear, unstable, and underactuated control systems so that it poses a challenge to design controls and realize them. The mechanical construction of the system consists of a pendulum arm that rotates horizontally on the RIP base shaft and a vertical pendulum arm that swings from a downward position to an upright equilibrium position. This paper presents a model and control scheme for RIP in a modular manner, in which three controller sections are constructed and realized using *Multibody Matlab*. The three controller parts include: a swing-up using a positive feedback Proportional Derivative controller, a switching mode controller that works to change swing up control scheme into stabilization control when the vertical pendulum arm reaches a position around its upright equilibrium, and stabilization controller to maintain vertical arm balanced using a Proportional Derivative controller. The trajectory of the motion of the pendulum arm and the 3D visualization of the pendulum system presented using *Multibody Matlab* show the effectiveness of the applied method.

Keywords: *rotary inverted pendulum, swing-up control, proportional derivative, stabilisation control*

I. PENDAHULUAN

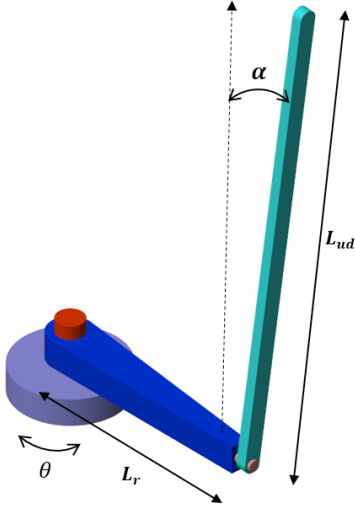
Model dan kendali pendulum terbalik tipe *rotary* (*rotary inverted pendulum*, RIP) banyak digunakan sebagai contoh aplikasi praktis dalam berbagai aplikasi kendali yang membutuhkan kestabilan dan kekokohan terhadap gangguan seperti kendali sistem robotika, sistem kedirgantaraan, dan sistem otomasi [1], [2]. Lebih lanjut, analisis kendali pendulum terbalik memainkan peran penting dalam perancangan kendali untuk sistem-sistem yang tak stabil, dan non-linear seperti sistem robot penyeimbang (*balancer robot*), peluncur misil, kesetimbangan sikap satelit [3].

Berbeda dengan pendulum terbalik tipe gerobak (*cart-type*) yang memiliki keterbatasan gerak tergantung pada lintasan rel yang disediakan, pendulum terbalik tipe *rotary* dapat bergerak leluasa berputar kontinyu untuk

menstabilkan lengan pendulum [4].

Mekanisme kendali pada pendulum terbalik *rotary* umumnya terdiri dari dua langkah: (i) menggerakkan lengan putar (*rotary arm*) horisontal supaya lengan pendulum kedua (*upper arm*) vertikal sampai pada posisi tegak (*swing up*); dan (ii) dilanjutkan dengan menstabilkan lengan pendulum kedua (*upper arm*) di sekitar posisi tegak dan lengan pendulum pertama (*rotary arm*) bergerak menyeimbangkan dan stabil pada kecepatan sekitar nol (*stabilizing*).

Kedua mekanisme *swing up* dan *stabilizing* dapat digabungkan secara bergantian dengan metode pensaklaran (*switching mode*) sesuai kriteria tertentu, yakni lengan pendulum *upper arm* mencapai nilai sudut di sekitar kesetimbangan sehingga tujuan kendali keseluruhan tercapai yakni lengan pendulum *upper arm* pada posisi tegak sekitar keseimbangan dan lengan pendulum putar

Gambar 1. Konstruksi fisik model pendulum terbalik tipe *rotary*

horizontal bergerak menyeimbangkan pendulum *upper arm*.

Permasalahan yang menjadi tantangan adalah bagaimana menjaga posisi lengan pendulum *upper arm* tetap tegak dengan menggerakkan lengan pendulum *rotary arm* saja, dimana kondisi seperti ini dikenal sebagai sistem *underactuated*.

Studi ini bertujuan menelaah kinerja mekanisme kendali pada pendulum terbalik tipe rotary mulai dari kendali *swing-up*, mode pensaklaran sesuai kriteria dan kendali *stabilizing* pada pendulum terbalik tipe *rotary* menggunakan kendali PD umpan balik positif untuk *swing-up* dan kendali PD untuk stabilisasinya. Kinerja secara visual direpresentasikan menggunakan 3D Multibody Matlab sehingga berkontribusi memiliki potensi dapat menggantikan realisasi sistem fisik yang membutuhkan perangkat keras (*hardware*), khususnya untuk kepentingan pembelajaran model dan desain kendali.

II. MODEL MATEMATIK

Secara umum, persamaan tak linier dinamika pendulum terbalik tipe rotary (RIP) dapat dituliskan dalam persamaan differensial sebagai berikut [5]:

$$M(x)\ddot{x} + C(x, \dot{x})\dot{x} + K(x) = T \quad (1)$$

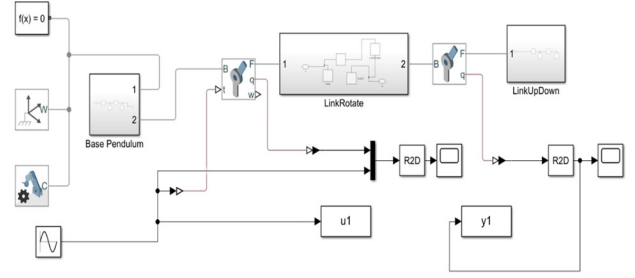
dimana,

$$M(x) = \begin{bmatrix} J_r + m_{ud}(L_r^2 + L_{ud}^2 \sin^2 \alpha) & m_{ud}L_{ud}L_r \cos \alpha \\ m_{ud}L_{ud}L_r \cos \alpha & J_{ud} + m_{ud}L_{ud}^2 \end{bmatrix},$$

$$C(x, \dot{x}) = m_{ud}L_{ud}L_r \sin \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -L_{ud} \cos \dot{\theta} + \frac{1}{2}L_r \dot{\alpha} & \frac{1}{2}L_r \dot{\theta} \end{bmatrix},$$

$$K(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ m_{ud}gL_{ud} \sin \alpha \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } x = \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Gambar 2. Model Simulink pendulum terbalik tipe *rotary*

Parameter fisik model matematik RIP ditampilkan dalam Tabel 1, dengan visualisasi 3D menggunakan Simscape Multibody Matlab pada Gambar 1.

Visualisasi pada Gambar 1 merupakan model mekanik sistem pendulum menggunakan Simulink Multibody, dengan konstruksi seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.

Pada Gambar 2 terlihat bahwa pendulum tersusun atas bagian dasar (*Base*) sebagai poros putar penggerak, lengan pendulum pertama yang berotasi (*LinkRotate*) horizontal yakni lengan rotary arm dan lengan pendulum kedua (*LinkUpDown*) yang mengayun vertikal.

Pada Gambar 1, lengan *LinkRotate* dan lengan *LinkUpDown* ditunjukkan dengan L_r yang membentuk sudut rotasi θ pada bidang horizontal dan L_{ud} yang membentuk sudut α di sekitar kesetimbangan vertikal. Penggerak sistem RIP, pada Gambar 2 direpresentasikan dengan sinyal sinusoida, yang nantinya akan disesuaikan menjadi sinyal aksi kendali hasil dari desain kendali [5].

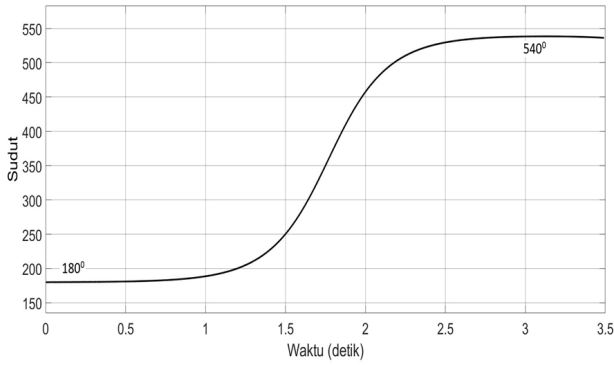
III. DESAIN KENDALI

Model matematik menjadi acuan desain kendali supaya sistem dapat bekerja dengan baik (*swing-up* dan stabil) pada RIP. Beberapa skenario kendali yang pernah dilaporkan diantaranya adalah penerapan teknik orbit homoklinik [4], teknik *backsteeping* tanpa model [6], kendali adaptif untuk RIP dengan ketidakpastian yang berubah terhadap waktu (*time varying uncertainties*) [7], dan kendali mode pergeseran (*sliding mode control*) yang tidak membutuhkan model matematik [8]. Untuk skenario yang tidak membutuhkan model seperti pada [6,8] maka identifikasi dan estimasi sistem menjadi acuan desain kendalinya.

Kendali yang diusulkan pada studi ini merupakan kendali modular, yang terdiri dari: kendali *swing-up*, mode pensaklaran serta kendali stabilisasi yang dijelaskan sebagai berikut:

A. Kendali Ayunan (*Swing-up control*)

Saat pendulum dalam posisi stabil menggantung ke bawah, perlu tenaga untuk menggerakkan lengan pendulum supaya berayun ke posisi tegak melalui gaya putar lengan pendulum yang berputar. Terdapat banyak strategi kendali yang dapat diaplikasikan seperti menggunakan kendali energi [9], kendali impulsif berulang [10], dan kendali bauran (*hybrid*) tak linier [11].



Gambar 3. Trayektori sudut pendulum vertical RIP

Pada makalah ini, metode mengayun lengan pendulum vertikal dari posisi menggantung ke bawah menjadi posisi tegak menggunakan kendali proporsional derivatif umpan balik positif. Melalui umpan balik positif, maka sinyal kesalahan (*error signal*) akan membesar sehingga mampu mengangkat lengan pendulum melawan gaya gravitasi menuju posisi tegak.

Terlihat pada Gambar 3, lengan pendulum vertikal dari posisi tegak 180°, turun ke posisi 360° dan kembali tegak di posisi 540°, menunjukkan bahwa dengan kendali PD umpan balik positif, lengan vertikal dapat mengayun penuh.

B. Mode Pergantian Ayunan ke Stabilisasi (*Switching mode*)

Tujuan dari mode pensaklaran adalah untuk melacak posisi pendulum dan memfasilitasi lengan pendulum beralih mode antara kendali destabilisasi, dan kendali stabilisasi [12].

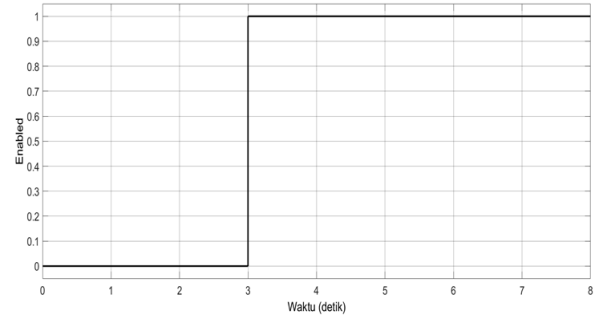
Dengan kata lain, ketika gerakan pendulum menuju posisi tegak, kendali mode pensaklaran akan mengaktifkan kendali stabilisasi untuk menahan pendulum dalam tetap pada posisi tegak di sekitar garis kesetimbangan. Di samping itu, ketika pendulum kembali jatuh dari posisi tegak, mode kendali pensaklaran akan kembali membawa sistem pada mode kendali destabilisasi untuk membawa pendulum kembali ke posisi tegak lagi. Kondisi saat pendulum kedua (*upper arm*) di posisi tegak, berlaku besar sudutnya sebagai berikut:

$$\alpha \approx \pm(2k+1)180^\circ \text{ dan } t > 0. \quad (2)$$

Berdasarkan trayektori *swing-up* pada Gambar 4, kondisi lengan pendulum atas (*linkUpDown*) di sekitar kesetimbangan pertama kali terjadi pada detik ke 3,028.

C. Kendali Stabilisasi (*Stabilising control*)

Kendali stabilisasi adalah untuk menjaga lengan pendulum kedua tetap pada posisi tegak, meskipun ada gangguan kecil. Jika lengan pendulum kedua dan lengan yang berputar dapat dibaca sebagai sinyal umpan balik dan dengan asumsi posisi pendulum telah hampir tegak, kendali PD dapat dirancang untuk mempertahankannya



Gambar 4. Mode pensaklaran yang mengubah sistem dalam kondisi kendali destabilisasi menjadi kondisi kendali stabilisasi

Tabel 1. Parameter-parameter fisik RIP

Simbol	Keterangan	Nilai
θ	Sudut lengan pendulum putar horizontal	-
α	Sudut lengan pendulum tegak	-
m_{ud}	Massa lengan pendulum tegak	24 gr
m_r	Massa lengan pendulum putar horizontal	1,6 kg
L_{ud}	Panjang lengan pendulum tegak	80 cm
L_r	Panjang lengan pendulum putar horizontal	80 cm
j_{ud}	Momen inersia lengan pendulum tegak	0,00512
j_r	Momen inersia lengan pendulum putar horizontal	0,0853
τ	Torsi yang menggerakkan pendulum	-
g	Konstanta percepatan gravitasi	9,8 m/det2

pada posisi tegak dengan kemampuan menolak gangguan kestabilan sampai batas tertentu.

Sebagai kelanjutan Persamaan (2) sebelumnya, saat posisi lengan pendulum kedua (*upper arm*) di sekitar setimbang maka berlaku,

$$\alpha \approx \pm(2k+1)\pi, \quad \dot{\alpha} \approx 0, \quad \ddot{\alpha} \approx 0 \text{ dimana } k = 0,1,2,\dots \quad (3)$$

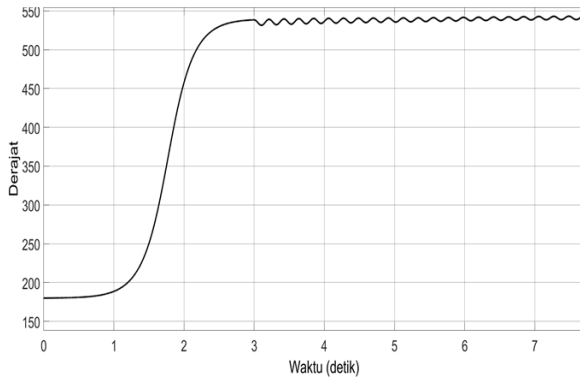
Persamaan (3) menjamin kecepatan lengan pendulum yang berputar horizontal, mendekati nol meskipun posisi berubah konstan untuk menjaga kestabilan lengan kedua (*upper arm*) tetap di posisi sekitar setimbang yang terganggu dengan sinyal gangguan.

Dengan demikian, Persamaan (1) dapat juga dituliskan dalam persamaan ruang keadaan (*state space*) berikut:

$$\ddot{x} = M^{-1}(x) \{T - C(x, \dot{x})\dot{x} - K(x)\}$$

$$= - \frac{1}{(j_r + m_{ud}L_r^2)(j_{ud} + m_{ud}L_{ud}^2) - (m_{ud}L_{ud}L_r)^2} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} - m_{ud}L_{ud} \sin \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -L_{ud} \cos \theta + L_r \dot{\alpha} & \frac{1}{2}L_r \dot{\theta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ m_{ud}gL_{ud} \sin \alpha \end{bmatrix} \right\} \quad (4)$$

Dengan mensubstitusikan nilai parameter pada Tabel 1,



Gambar 5. Trayektori sudut lengan pendulum upper arm, dari kondisi destabilisasi menuju stabilisasi

kita dapat menyelesaikan Persamaan (4) di atas sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \frac{1}{5.7562 \times 10^{-4}} \begin{bmatrix} 0.02048 & -0.01536 \\ -0.01536 & 0.10066 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix},$$

dengan demikian, fungsi alih sistem (1) menjadi:

$$\frac{\alpha(s)}{r(s)} = -2.6684 \frac{1}{s^2}. \quad (5)$$

Terlihat bahwa sistem merupakan double integrator, sehingga rasio redaman sama dengan nol yang menyebabkan sistem senantiasa berosilasi dan tidak stabil [13]. Untuk mengurangi osilasi sehingga posisi lengan pendulum tetap di sekitar setimbang, maka ditambahkan kendali PD dengan gain $K_p=0.5$ dan $K_d=0.03$ untuk memenuhi gain aksi kendali:

$$u = K_p (\alpha - \alpha_{ref}) + K_d \frac{d}{dt} (\alpha - \alpha_{ref}). \quad (6)$$

Pada desain sistem kendali ini, diset $\alpha_{ref}=180^\circ$, yakni lengan pendulum *upper arm* pada posisi tegak ke atas.

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan nilai parameter sistem pada Tabel 1, sistem dinamik pada persamaan (1) dan desain kendali PD umpan balik positif untuk destabilisasi dan kendali PD untuk stabilisasi maka dapat disimulasikan trayektori sudut posisi angular link pendulum kedua L_{ud} seperti terlihat pada Gambar 4.

Model dan desain kendali swing-up/destabilisasi, mode pensaklaran dan kendali stabilisasi dengan PD telah direalisasikan melalui 3D Simscape Matlab. Gambar 5 menunjukkan trayektori posisi *link pendulum upper arm* mulai dari posisi awal, dengan kendali destabilisasi di sekitar kesetimbangan menggunakan kendali PD.

Untuk memverifikasi keberhasilan penggunaan kendali PD dan kendali fuzzy, model kendali 3D dari RIP dapat divisualisasikan menggunakan Simscape Matlab. Lebih jelas, pembaca dapat melihat video aplikasi kendali destabilisasi menggunakan kendali umpan balik positif PD dan stabilisasi dengan kendali PD pada <https://youtu.be/3sgQP5yu4Ho>.

be/3sgQP5yu4Ho.

Pengukuran *bilevel* menunjukkan lengan pendulum *upper arm* dari posisi tegak 180° mulai jatuh pada detik ke 0,8 menuju posisi tegak *downward* 360° dan kembali mengayun ke posisi tegak *upright* 540° merupakan kondisi destabilisasi (*swing-up control*) selama 3,028 detik. Mode pensaklaran dapat memantau dan mengubah sistem kendali menjadi kondisi stabilisasi setelah detik ke 3,028. Sedikit ayunan (*ripple signal*) dengan osilasi sebesar 0,85% selama kondisi kendali stabilisasi terjadi akibat tambahan sinyal gangguan, berupa sinusoida diskrit dengan amplitudo $\frac{1}{2}$, frekuensi 1 rad/detik, dan waktu pencuplikan 0,001 detik.

V. KESIMPULAN

Studi model dan kendali destabilisasi dan stabilisasi sistem pendulum terbalik tipe rotary pada naskah ini menyimpulkan beberapa hasil, diantaranya adalah visualisasi 3D dengan Simscape Multibody telah memverifikasi hasil desain kendali yang ditunjukkan dengan trayektori sudut lengan pendulum *upper arm*. Mekanisme destabilising ayunan lengan pendulum menunjukkan bahwa kendali destabilisasi (*swing-up*) dengan kendali PD umpan balik positif berhasil memberikan energi ayunan bagi RIP, dimana ayunan pertama yang mencapai posisi tegak keatas didapat dalam waktu 3,028 detik.

Pada mode pensaklaran, kendali berhasil mendeteksi kondisi sudut lengan pendulum *upper arm*, sehingga saat lengan disekitar kondisi tegak keatas maka mode kendali diubah menjadi kendali stabilisasi.

Adapun kendali stabilisasi (*stabilising*) berhasil menstabilkan posisi lengan *upper arm* disekitar kesetimbangan meskipun adanya sinyal gangguan, dengan menggerakkan lengan putar horizontal sebagai lengan penggerak sistem RIP.

Dengan demikian, pemodelan dan desain kendali menggunakan Simscape dapat menjadi alternatif pembelajaran, tanpa membutuhkan perangkat keras dengan visualisasi yang terverifikasi dengan trayektori simulasi pada Gambar 5.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis menyampaikan penghargaan setinggi-tingginya kepada Direktorat Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat, Universitas Telkom atas dukungan teknis dan finansial bagi penelitian dan penulisan naskah, melalui Hibah Penelitian Dasar Internal No 015/PNLT3/PPM/2022.

REFERENSI

- [1] S. Pramanik and S. Anwar, "Robust controller design for rotary inverted pendulum using H_∞ and μ -synthesis techniques," *J. Eng.* 2022, pp. 249–260, 2022.
- [2] A. L. M, A. Kunjumammed, J. Tomy, U. G, M. Sivadas and A. Mohan, "Stabilization of Rotary Inverted Pendulum using

- PID Controller,” 2021 8th International Conference on Smart Computing and Communications (ICSCC), pp. 376-380, 2021.
- [3] K. N. Deepak, K. Rahul Sharma, and T. Ananthan, “Model Predictive Control for rotary inverted pendulum using LabVIEW,” *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 577 012113.
- [4] I. Fantoni, R. Lozano, “Stabilization of the Furuta Pendulum around its homoclinic orbit,” *IFAC Nonlinear control Systems*, pp. 807-812, 2001.
- [5] E. Susanto, B. Rahmat and M. Ishitobi, “Stabilization of Rotary Inverted Pendulum using Proportional Derivative and Fuzzy Controls,” in *the 9th International Conference on Information Technology, Computer, and Electrical Engineering (ICITACEE)*, 25-26 August 2022.
- [6] J. Huang, T. Zhang, Y. Fan and J. -Q. Sun, “Control of Rotary Inverted Pendulum Using Model-Free Backstepping Technique,” *IEEE Access*, vol. 7, pp. 96965-96973, 2019.
- [7] Y.F. Chen and A.C. Huang, “Adaptive control of rotary inverted pendulum system with time-varying uncertainties,” *Nonlinear Dyn.*, vol. 76, no. 1, pp. 95–102, 2014.
- [8] I. Yüit, “Model free sliding mode stabilizing control of a real rotary inverted pendulum,” *J. Vib. Control*, vol. 23, no. 10, pp. 1645–1662, 2017.
- [9] K.J. Åström and K. Furuta, “Swinging up a pendulum by energy control,” *Automatica*, vol. 36 no. 2, pp. 287–295, 2000.
- [10] Z. Wang, Y. Chen, and N. Fang, “Minimum-time swing-up of a rotary inverted pendulum by iterative impulsive control,” *Proceedings of the American control conference (ACC)*, pp. 1335–1340, 2004.
- [11] N.P. Nguyen, H. Oh, Y. Kim and J. Moon, “A nonlinear hybrid controller for swinging-up and stabilizing the rotary inverted pendulum,” *Nonlinear Dyn.*, vol. 104, pp. 1117–1137, 2021.
- [12] X. Diao., “Modular Control of a Rotary Inverted Pendulum System,” *123rd ASEE Annual Conference and Exposition, New Orleans*, June 26-29, 2016.
- [13] E. Susanto, “Desain dan Analisa Sistem Kendali,” Penerbit Salemba Teknik ISBN 978-979-9549-55-6, 2021.