

Penggunaan Edukasi Deret untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Linear Orde Dua

Safrina, M. Hasbi dan Cut Morina Zubainur

Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Syiah Kuala
Email: safrina091@gmail.com

Abstract: *Differential equations are one of the compulsory subjects at state universities, especially in the mathematics education department. It is hoped that students can hone their skills to analyze, model, solve, and apply the theory they have learned to advanced theory. One of the second-order Linear Differential Equations challenging to solve is the second-order Linear Differential Equations with indeterminate coefficients. This equation is necessary to study because it has many applications in mathematics. This study examines the use of series education to solve second-order Linear Differential Equations, especially with indeterminate coefficients. The data were from calculus manuals and mathematicians in calculus. The research applied design research with the product of steps to solve the use of series reduction to solve second-order linear differential equations. The data were obtained through books, journals, and direct conversations with mathematicians in calculus and analyzed using the Milles and Huberman models and theoretical triangulation for the validity of the data. The achievement of this research is a second-order linear differential equation with an indeterminate coefficient that can be solved with a series, namely the Airy, Hermite, Chebyshev, Legendre, Bessel, Leguerre, and Gauss hypergeometric equations. These research findings can be used as input for mathematics teachers or students as an alternative work.*

Keywords: *Educational series, Taylor series, Maclaurint series, Second order linear differential equation*

Pendahuluan

Belajar matematika berarti suatu proses berpikir yang mengarah ke bentuk matematis. Matematika yang disebut sebagai ratunya ilmu memiliki sifat hirarki yaitu pembelajaran yang dimulai dari tahap mudah, menengah, hingga sulit yang setiap tahap tersebut mempengaruhi satu sama lain. Selain itu, matematika juga berkaitan dengan ilmu yang lainnya seperti ilmu sosial, ilmu sains, dan lain sebagainya. Sepatutnya, matematika harusnya dikuasai terlebih dahulu sehingga mudah menerapkannya pada ilmu lain.

Mata kuliah wajib yang dipelajari di Perguruan Tinggi yang bergelut dalam bidang sains dan teknologi adalah mata kuliah Persamaan Diferensial (PD). Mata kuliah tiga SKS ini juga dipelajari oleh mahasiswa Program Studi S1 Pendidikan Matematika dengan harapan dapat mengasah keahlian untuk berkarya menganalisis, memodelkan, menyelesaikan, serta mengaplikasikannya terutama dengan bantuan konsep yang telah diperoleh sebelumnya pada mata kuliah lain seperti Kalkulus Diferensial, Integral dan Kalkulus Lanjut. Hasil yang diharapkan ialah dengan tercapainya kompetensi

mahasiswa setelah mengambil mata kuliah ini diantaranya mampu menyelesaikan PD biasa orde satu, orde dua, dan orde tinggi, menentukan solusi dengan deret PD biasa, menyelesaikan PD dengan Transformasi Laplace, menyelesaikan permasalahan nyata (sederhana) dengan menggunakan PD biasa (Rahmi dkk, 2016). Berdasarkan pengalaman peneliti dalam perkuliahan, mahasiswa memiliki kesulitan untuk menerapkan rumus atau algoritma yang telah diajarkan. Kesulitan terbanyak tersebut terletak pada pemahaman konsep persamaan, konsep fungsi dan turunan suatu fungsi (Ningsih dan Rohana, 2018). PDL orde dua salah satunya yang memiliki berhingga metode sistematis yang membutuhkan algoritma berpikir untuk mendapatkan solusi. Meskipun begitu, persamaan tersebut cukup penting dipelajari untuk menjelaskan secara klasik permasalahan yang berkaitan dengan fenomena fisis (Marwan dan Munzir, 2009; Waluya, 2006). Pada penyelesaian PDL orde satu, dengan mudah diperoleh dengan metode koefisien peubah atau konstanta, sebagai berikut,

Contoh : $xy' - 2y = x^3$, $x \neq 0$. Maka penyelesaian umumnya adalah $y(x) = x^3 + cx^2$, dengan c konstanta sembarang. Selanjutnya, melakukan keahlian aljabar akan diperoleh nilai konstantanya. Hal tersebut tidak sederhana jika menyelesaikan persamaan differensial linear orde dua dengan koefisien peubah. Hampir tidak ada cara untuk mencari penyelesaian umum persamaan linear orde dua dengan koefisien peubah secara eksplisit, kecuali persamaan differensial itu berbentuk sangat khusus (seperti bentuk Euler, dll). Cara lain ialah dengan menebak pola persamaan differensialnya mengarah ke bentuk persamaan khusus seperti yang telah disebutkan. Jika harus menebak dan mencari kecocokan penyelesaian akan membutuhkan waktu yang lama. Cara praktisnya ialah koefisien peubah dihampiri ke penyelesaian persamaan diferensial dengan koefisien konstanta pada selang yang kecil. Namun hal tersebut belum menjamin galatnya kecil sehingga cara yang akan menghasilkan hampiran yang sempurna ialah mencari suatu deret kuasa dari persamaan diferensial dengan koefisien peubah (Santoso, 1998).

Ternyata deret memiliki suatu kelebihan untuk menghampiri masalah PDL orde dua yang sulit untuk diperoleh secara eksplisit. Diperlukan suatu edukasi deret yang membuat mahasiswa lebih memahami algoritma berpikir dalam menyelesaikan masalah tersebut. Selain kompetensi yang diharapkan dapat tercapai, mahasiswa akan

memperoleh konsep dasar penyelesaian deret yang kuat sehingga akan berguna untuk *study* lanjutan.

Berdasarkan latar belakang tersebut, Rumusan masalah penelitian ini adalah: Bagaimana penggunaan edukasi deret untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear orde dua? Tujuan penelitian ini adalah untuk mengkaji penggunaan edukasi deret untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear orde dua.

Metode

Penelitian ini bertujuan untuk menghasilkan kajian mengenai penggunaan edukasi deret untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear orde dua. Data yang diperlukan ialah rekomendasi dan komentar para pakar yang ahli di bidang kalkulus. Data tersebut dapat diperoleh dari revisi rancangan teori yang dilakukan oleh peneliti hingga kajian tersebut disetujui. Data yang diperoleh merupakan data kualitatif karena bersumber dari pakar dan peneliti serta teori kepustakaan sebagai pendukung sehingga peneliti akan menggunakan pendekatan kualitatif (Rukajat, 2018).

Adapun jenis penelitian ini adalah *design research research* dengan produk berupa langkah penyelesaian penggunaan edukasi deret untuk menyelesaikan PDL orde dua. Hal ini karena peneliti melakukan kajian lalu merancang langkah-langkah solusi yang tepat dalam penyelesaian persamaan diferensial linear orde dua tersebut. Penelitian ini juga berfokus pada penggunaan edukasi deret pada PDL orde dua yang khusus (Lidinillah, 2012).

Sumber data penelitian ini ialah buku materi persamaan diferensial dan deret yang dikaji dari sumber seperti buku pedoman kalkulus dan pakar matematika bidang kalkulus. Data dikumpulkan dari rekomendasi dan saran pakar matematika bidang kalkulus, kajian penggunaan edukasi deret tersebut akan divalidasi dengan menggunakan instrumen yaitu lembar validitas untuk mengetahui kesimpulan kajian teori tersebut.

Adapun teknik analisis data dalam penelitian ini ialah dianalisis dengan langkah-langkah seperti mereduksi data dengan memilih data yang dianggap penting, menyajikan data dalam bentuk narasi yang sistematis, dan menarik kesimpulan berupa hasil kajian penggunaan edukasi deret untuk menyelesaikan persamaan diferensial

linear orde secara rinci. Data yang dikumpulkan dari beberapa cara akan ditrinangulasi dengan triangulasi teori (Nofriansyah, 2018).

Hasil dan Pembahasan

Tujuan penelitian ini adalah mengkaji penggunaan edukasi deret untuk menyelesaikan PDL orde dua. Data tersebut diperoleh dari kajian teori dan hasil rekomendasi pakar matematika bidang kalkulus. Berikut penjelasan terkait penggunaan edukasi deret untuk menyelesaikan PDL orde dua:

PDL orde dua dapat ditulis dalam bentuk umum,

$$f_2(x)y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = Q(x) \quad (1)$$

(Darmawijoyo, 2011). Secara khusus, persamaan yang akan dikaji ialah,

$$\text{Bentuk persamaan } a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x), a_2(x) \neq 0 \quad (2)$$

Selanjutnya, dapat diperhatikan langkah penggunaan deret sebagai berikut:

- a. Menentukan titik biasa, titik singular, dan titik singular regular pada PDL orde dua

Bentuk PDL orde dua (2) yang memiliki koefisien tak tentu dalam menemukan penyelesaiannya perlu diuji terlebih dahulu persamaan tersebut apakah memiliki titik biasa, titik singular regular, atau titik singular yang tidak regular. Titik $x=x_0$ dikatakan titik biasa jika persamaan tersebut konvergen untuk semua x . Sesuai dengan definisi,

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)} \text{ dan } \frac{a_0(x)}{a_2(x)}, \quad (3)$$

Keduanya analitik pada titik x_0 . (Santoso, 1998).

Titik $x=x_0$ dikatakan titik singular reguler jika titik $x=x_0$ sesuai dengan definisi berikut,

$$(x - x_0) \frac{a_1(x)}{a_2(x)} \text{ dan } (x - x_0)^2 \frac{a_0(x)}{a_2(x)}, \quad (4)$$

Keduanya analitik pada titik x_0 dalam $-R + x_0 < x < R + x_0$. (Santoso, 1998).

Sementara titik $x=x_0$ dikatakan titik singular tak reguler jika menyebabkan salah satu dari bentuk koefisien (4) tidak analitik. Akibatnya, tidak ada penyelesaian untuk titik ini.

- b. Menggunakan konsep deret untuk penyelesaian PDL orde dua

Deret yang akan digunakan untuk menyelesaikan PDL orde dua ialah deret pangkat atau sering juga disebut deret kuasa. Deret pangkat menjadi alternatif solusi dari PDL orde dua yang memiliki koefisien variabel karena beberapa hal yaitu fungsi

yang memuat variabel dapat berbentuk fungsi polinomial dan bukan polinomial. Fungsi tersebut dapat diekspresikan ke bentuk deret pangkat tentunya di sekitar pusat x_0 . Deret tersebut adalah deret taylor dan maclaurint. Bentuk umum deret taylor suatu fungsi f berbentuk,

$$f(x) = y = y(x_0) + y'(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

Secara singkat dapat ditulis menjadi,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, R > 0 \quad (5)$$

atau

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, R > 0, \quad (6)$$

dengan $a_n = \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}$ (Kreyszig.1979).

Sementara deret maclaurint menyederhanakan persamaan tersebut dengan menentukan $x_0 = 0$, sehingga deretnya menjadi,

$$f(x) = y = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Dan ekspansinya juga berubah menjadi,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n, R > 0 \quad (7)$$

atau

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, R > 0, \quad (8)$$

dengan $a_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!}$ (Kreyszig.1979).

Deret taylor dan maclaurint juga diperlukan untuk menghampiri nilai-nilai fungsi yang sulit untuk dihitung secara manual seperti fungsi $\sin x, \cos x, e^x, \log x, \ln(x + 1)$, dan lain sebagainya. Selain itu, alasan digunakan deret taylor dan maclaurint ialah karena deret tersebut memiliki sifat penjumlahan, pengurangan, diferensiasi, dan integrasi yang diperlukan untuk menyelesaikan PDL orde dua (Levi, 1967). Dan tentunya fungsi-fungsi lainnya akan lebih mudah jika diekspansikan ke bentuk deret taylor atau maclaurint.

Selanjutnya, dapat diasumsikan bahwa solusi dari PDL yang akan ditemukan penyelesaiannya dalam bentuk deret sebagai berikut,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (6)$$

Selanjutnya diferensialkan menjadi,

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \quad (9)$$

Dan

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} \quad (10)$$

Karena PDL yang akan diselesaikan berorde dua, maka deret tersebut didiferensialkan hanya dua kali. Kemudian Substitusi y, y', y'' dan x_0 ke persamaan (2) dengan $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ dan $Q(x)$ tertentu. Jika diperlukan koefisien $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ dapat dibangkitkan terlebih dahulu ke bentuk deret pangkat. Namun, jika koefisien tersebut sederhana dapat dilakukan operasi hitung secara langsung.

$$a_2(x) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} + a_1(x) \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} + a_0(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = Q(x) \quad (11)$$

Selanjutnya, koefisien berindeks pada deret di persamaan tersebut akan dioperasikan dengan menggunakan operasi deret sehingga membentuk rumus rekursif, maka diperoleh solusi yang diharapkan. Jika diperlukan dapat menguji kekonvergenan hasil penyelesaian dengan uji deret seperti uji rasio, uji suku ke-n, uji deret berganti ganda dan lainnya sesuai kebutuhan.

Langkah penggunaan deret tersebut untuk menyelesaikan PDL orde dua tentunya sesuai dengan teorema sebagai berikut:

Teorema

Jika x_0 sebuah titik biasa dari PD (2), maka penyelesaian umum PD itu mempunyai suatu deret kuasa di sekitar x_0

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad (6)$$

dengan jari-jari kekonvergenan yang positif dan minimum sama dengan R_1 dan R_2 . Koefisien a_n untuk $n=2, 3, \dots$ dari deret (6) dapat diperoleh a_0 dan a_1 dengan mensubstitusikan deret (6) ke PD (2) dan dengan menyamakan koefisien dari suku yang berpangkat sama. Jika (4.9) merupakan penyelesaian masalah nilai awal $y(x_0) = y_0$ dan $y'(x_0) = y_1$, maka $a_0 = y_0$ dan $a_1 = y_1$ (Santoso, 1998).

Untuk penyelesaian di sekitar titik singular regular dapat diperhatikan definisi dan teorema berikut,

Definisi

Misalkan bahwa x_0 merupakan titik singular yang regular dari PD (4.5) dan misalkan bahwa (4.7) dapat dibuat deret kuasa yang berbentuk

$$(x - x_0) \frac{a_1(x)}{a_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x - x_0)^n \text{ untuk } |x - x_0| < R_1 \quad (12)$$

Dan

$$(x - x_0)^2 \frac{a_0(x)}{a_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (x - x_0)^n \text{ untuk } |x - x_0| < R_2 . \quad (13)$$

Maka persamaan kuadrat

$$t^2 + (A_0 - 1)t + B_0 = 0 \quad (14)$$

Disebut persamaan indeks dari (12) dan (13) pada x_0 .

Teorema

Misalkan bahwa x_0 sebuah titik singular yang regular dari PD (2) dan misalkan bahwa (12) dan (13) berlaku. Misalkan pula bahwa t_1 dan t_2 dua akar dari persamaan indeks (14) yang ditandai sedemikian sehingga $t_1 > t_2$ dalam hal kedua akar itu merupakan bilangan riil. Maka salah satu penyelesaian dari persamaan (2) berbentuk

$$y_1(x) = |x - x_0|^{t_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (15)$$

Dengan $a_0 = 1$, berlaku di dalam selang $0 < |x - x_0| < R$, dimana $R = \min(R_1, R_2)$.

Suatu penyelesaian kedua yang bebas linear $y_2(x)$ dari persamaan (2) dalam selang tanpa pusat $0 < |x - x_0| < R$ diperoleh secara berikut.

Kasus 1 jika $t_1 - t_2 \neq$ bilangan bulat, maka

$$y_2(x) = |x - x_0|^{t_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \quad (16)$$

dengan mengasumsikan $b_0 = 1$.

Kasus 2 jika $t_1 = t_2$, maka

$$y_2(x) = y_1(x) \ln|x - x_0| + |x - x_0|^{t_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \quad (17)$$

$b_0 = 1$.

Kasus 3 jika $t_1 = t_2$ (bilangan bulat positif), maka

$$y_2(x) = C y_1(x) \ln|x - x_0| + |x - x_0|^{t_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \quad (18)$$

$b_0 = 1$. Konstanta terkadang sama dengan nol.

(Santoso, 1998).

PDL orde dua yang memiliki koefisien tak tentu dapat diperhatikan pada persamaan-persamaan khusus berikut:

$$\textbf{Persamaan Airy: } y'' - xy = 0 \quad (19)$$

$$\textbf{Persamaan Bessel: } x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \quad (20)$$

dengan p adalah konstanta real atau kompleks.

$$\textbf{Persamaan Chebyshev: } (1 - x^2)y'' - xy' + p^2 y = 0 \quad (21)$$

dengan p suatu konstanta (Santoso, 1998).

Persamaan Hermite: $y'' - 2xy' + 2py = 0$, (22)

dengan p suatu konstanta.

Persamaan Legendre: $(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p + 1)y = 0$ (23)

dengan p adalah konstanta.

Persamaan Leguerre: $xy'' + (1 - x)y' + py = 0$ (24)

Dengan p konstanta.

Persamaan Hipergeometrik dari Gauss: $x(1 - x)y'' + [c - (a + b + 1)x]y' - aby = 0$ (25)

dengan a , b dan c konstanta.

Berdasarkan hasil penelitian mengenai kajian penggunaan edukasi deret untuk menyelesaikan PDL orde dua, yang peneliti peroleh dari beberapa buku dan rekomendasi pakar matematika bidang kalkulus bahwa persamaan diferensial orde dua dengan koefisien yang memuat variabel (tak tentu) hanya dapat diselesaikan dengan deret. Ada beberapa jenis deret yang tersedia, namun peneliti meninjau deret Taylor dan Maclaurin yang paling familiar di kalangan mahasiswa dan dapat dikerjakan dengan langkah-langkah yang mudah.

Penyelesaian dengan deret terlihat lebih rumit, namun sangat dibutuhkan di kalangan akademisi. Banyak hampiran deret Taylor dan Maclaurin yang diperoleh dengan menggunakan komputer namun penguatan konsep yang dilakukan secara manual akan memberikan efek pemahaman yang lebih baik sesuai dengan teorinya Skinner mengenai pentingnya latihan.

Penyelesaian PDL orde dua yang diperoleh hampir keseluruhannya menggunakan konsep deret yang perlu dikuasai oleh mahasiswa. Hal ini kembali berkaitan dengan hirarki belajar. Adapun konsep yang sangat penting tersebut ialah mengoperasikan deret dengan memperhatikan indeks deret yang telah diketahui sehingga dapat dihasilkan rumus rekursif untuk menentukan nilai yang kita inginkan.

Perhatikan langkah penyelesaian berikut pada persamaan Airy: $y'' - xy = 0$

Jika diasumsikan penyelesaian di titik $x_0 = 0$, $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, maka y'' menjadi,

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n$$

Bentuk 1 $\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$

$$\text{Bentuk 2} \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$\text{Bentuk 3} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n$$

Untuk hasil y yang dideferensialkan dua kali, ada tiga bentuk hasil yang berbeda namun bernilai sama. Perbedaannya terletak pada indeks dan koefisien deret tersebut.

Langkah selanjutnya, koefisien y karena menghasilkan satu bentuk deret saja tidak dipermasalahkan.

$$-xy = -x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = - \sum_{n=0}^{\infty} x a_n x^n = - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$$

Dijumlahkan ruas kiri dan kanannya dengan jumlah ruas kiri sama dengan nol.

$$0 = 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}] x^n$$

Saat dijumlahkan ruas kiri dan kanannya dengan jumlah ruas kiri sama dengan nol. Bentuk diferensial y'' yang digunakan ialah bentuk 3, hal ini dikarenakan bentuk 3 memiliki variabel x^n sama seperti deret pada koefisien y sehingga dapat dijumlahkan. Indeks pada deret yang telah dijumlahkan koefisiennya juga berubah dari $n=0$ menjadi $n=1$, hal ini juga dilakukan agar dapat dilakukan operasi hitung sesuai sifat penjumlahan pada deret. Perhatikan langkah penyelesaian berikut,

$$2a_2 = 0 \rightarrow a_2 = 0 \text{ dan } (n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1} = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} a_{n-1}, n = 1, 2, \dots$$

Substitusi nilai n pada rumus rekursif tersebut akan di peroleh solusinya sebagai berikut: Rumus rekursifnya menjadi,

$$a_{3n} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \dots (3n-4)(3n-3)(3n-1)(3n)}, n = 1, 2, \dots$$

$$a_{3n+1} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \dots (3n-3)(3n-2)(3n)(3n+1)}, n = 1, 2, \dots$$

Jadi, solusi umum persamaan Airy adalah

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

$$y(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_0}{(3)(2)} x^3 + \frac{a_1}{(4)(3)} x^4 + \dots$$

$$y(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \dots (3n-4)(3n-3)(3n-1)(3n)} x^{3n} +$$

$$a_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{3.4.6.7 \dots (3n-3)(3n-2)(3n)(3n+1)} x^{3n+1}$$

Persamaan A ird salah satu PDL orde dua khusus yang memiliki penyelesaian di sekitar titik biasa. Selain itu, persamaan Hermite, Chebyshev, dan Legendre juga dapat diselesaikan di sekitar titik biasa.

Selanjutnya, pada persamaan Bessel memiliki konstanta p . Saat nilai p ditentukan, penyelesaiannya juga dapat diselesaikan dengan langkah penyelesaian persamaan tersebut secara umum. Selain itu, saat nilai p ditentukan, dari tiga kasus penyelesaian kedua akan ditemukan satu kasus yang sesuai dengan persamaan indeksnya, perhatikan langkah penyelesaian persamaan Bessel (20):

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, \text{ jika } p=2 \text{ persamaannya menjadi,}$$

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0.$$

Menurut teorema penyelesaian disekitar titik singular regular, kita dapat menentukan $A_0 = 1$ dan $B_0 = -4$, sehingga persamaan indeksnya menjadi (14),

$$t^2 + (A_0 - 1)t + B_0 = 0 \rightarrow t^2 + (1 - 1)t - 4 = 0 \rightarrow t^2 - 4 = 0 \rightarrow t_1 = 2 \text{ dan } t_2 = -2.$$

Karena $t_1 - t_2 = 4$, dan 4 adalah bilangan bulat positif, sesuai dengan teorema, maka solusi persamaan Bessel berbentuk (15),

$$y_1(x) = |x|^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ untuk } |x| > 0.$$

Sementara penyelesaian kedua sesuai dengan kasus 3 (18) sebagai berikut:

$$y_2(x) = Cy_1(x) \ln|x| + |x|^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Persamaan Bessel merupakan salah satu PDL orde dua dengan koefisien tak tentu yang memiliki penyelesaian di sekitar titik singular regular. Persamaan lainnya yang mempunyai penyelesaian di sekitar titik singular regular ialah persamaan Leguerre dan Hipergeometrik gauss. PDL orde dua khusus, peneliti sajikan penyelesaiannya dengan menentukan konstanta tertentu pada masing-masing persamaan khusus tersebut. Hal ini dilakukan agar dapat menentukan koefisien masing-masing persamaan dengan konstanta tertentu secara jelas.

Simpulan dan Saran

Berdasarkan hasil penelitian yang dilakukan di Laboratorium Matematika dan Komputer (Labmatkom) FKIP Unsyiah mengenai kajian penggunaan edukasi deret untuk menyelesaikan PDL orde dua, dapat disimpulkan sebagai bahwa PDL orde dua yang memiliki koefisien tak tentu dapat diselesaikan dengan deret yaitu persamaan Airy, Hermite, Chebyshev, Legendre, Bessel, Leguerre, dan Hipergeometrik Gauss. Berdasarkan kesimpulan yang telah disebutkan, ada beberapa saran untuk kemajuan ilmu pengetahuan khususnya materi persamaan diferensial ini, yaitu: 1.) Penyelesaian PDL orde dua dengan koefisien tak tentu dapat diselesaikan dengan cara selain deret. Meskipun sedikit rumit, namun dapat menambah alternatif penyelesaian persamaan tersebut; 2.) Penelitian ini masih berupa rancangan, ke depannya mungkin dapat diuji cobakan kepada mahasiswa untuk mengetahui keefektifan teori tersebut.

Daftar Pustaka

- Darmawijoyo. 2011. *Persamaan Diferensial Biasa*. Jakarta: Erlangga
- Prodi S1 Pendidikan Matematika Unsyiah. 2018. *Pedoman Penulisan Skripsi*. Banda Aceh
- Kreyszig, E. 1979. *Advanced Engineering Mathematics* (4th ed). Canada: John Wiley.
- Lidinillah, D. 2012. *Design Research Sebagai Model Penelitian Pendidikan*. Diakses pada tanggal 3 Januari dari http://file.upi.edu/Direktori/kd-tasikmalaya/dindin_abdul_muiz_lidinillah_/Makalah_Design_Research_pada_Pelatihan_Penulisan_Skripsi.pdf
- Marwan dan Munzir, S. 2009. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu
- Ningsih dan Rohana. 2018. *Pemahaman Mahasiswa Terhadap Persamaan Diferensial Biasa Berdasarkan Teori Apos*. Palembang: Pendidikan Matematika FKIP Universitas PGRI
- Nofriansyah, Deny. 2018. *Penelitian Kualitatif: Analisis Kinerja Lembaga Pemberdayaan Masyarakat Kelurahan*. Yogyakarta: Deepublish
- Rukajat, Ajat. 2018. *Pendekatan Penelitian Kualitatif (Qualitative Research Approach)*. Yogyakarta: Deepublish
- Santoso, W. 1998. *Persamaan Diferensial Biasa Dengan Penerapan Modern edisi 2*. Jakarta: Erlangga
- Waluya, S.B. 2006. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

